

Université Paris Dauphine  
CEREG  
Année 2003-2004

Mémoire de DEA

**Modélisation des mortgages**  
Une revue de la littérature

Directeur de mémoire :

Professeur BATSCH

Candidat au DEA 104 :

Arnaud SIMON

# **TABLE DES MATIERES**

<b><u>TABLE DES MATIERES</u></b> .....	1
<b><u>INTRODUCTION</u></b> .....	4
<b><u>PARTIE 1 : THEORIE OPTIONNELLE DES MORTGAGES</u></b> .....	5
I. <u>Evaluation d'un mortgage par la théorie de l'arbitrage</u> .....	6
a. Notations et références .....	6
b. Option de RA .....	6
c. Option de défaut .....	6
d. Dynamiques des variables d'états .....	6
e. Equation aux dérivées partielles d'évaluation .....	7
f. Valeurs à maturité .....	8
g. Valeurs aux dates intermédiaires .....	8
II. <u>Particularités des options appliquées aux mortgages</u> .....	9
a. Option de défaut .....	9
b. Séparation des actifs .....	9
c. Questions autour de l'évaluation sous Q, probabilité risque-neutre .....	10
III. <u>Approfondissements et variantes des modèles optionnels</u> .....	11
a. Mortgages britanniques .....	11
b. Intégration des pénalités de remboursement anticipé .....	12
c. Intégration des frictions .....	13
d. Pricing de tranches de CMO .....	13
e. Décomposition de l'option de défaut .....	14
f. Utilisation des modèles optionnels comme instruments d'analyse .....	14
g. Variante algorithmique .....	15
<b><u>PARTIE 2 : MODELES ECONOMETRIQUES</u></b> .....	16
I. <u>Principes des modèles économétriques</u> .....	17
a. Taux de hasard .....	17
b. Principe de la modélisation .....	18
c. Estimation.....	18
d. Approfondissement de la méthode : risques concurrents et hétérogénéité de population .....	19
e. Lien avec l'approche optionnelle .....	19
f. Un exemple d'étude économétrique .....	20

II. <u>Méthodes économétriques alternatives</u> .....	25
a. Modélisation par fonction logistique .....	25
b. Méthodes non-paramétriques .....	26
<b><u>PARTIE 3: APPROFONDISSEMENTS DES MODELISATIONS...</u></b>	<b>28</b>
I. <u>Modèles optionnels ou modèles économétriques ?</u> .....	29
a. Critique des modèles empiriques par les partisans de la modélisation optionnelle .....	29
b. Critique des modèles optionnels par les empiristes .....	29
c. modèles optionnels purs / modèles avec frictions et hétérogénéité .....	29
d. modèles structurels/modèles sous forme réduite .....	30
e. Prêts à taux fixe et à taux variable : un test des modèles optionnels .....	31
II. <u>Hétérogénéités et coûts d'exercice</u> .....	32
a. Motivation .....	32
b. Preuve de la pertinence de l'hétérogénéité : la modélisation des courbes de RA et l'explication du phénomène de burnout .....	33
c. Application : pricing des tranches de CMO .....	35
d. Hétérogénéité des pénalités de RA .....	36
e. Traduction géographique de l'hétérogénéité, problème des variables omises.....	38
f. Econométrie de l'hétérogénéité .....	38
III. <u>Modélisation de H</u> .....	39
a. Une modélisation discrète, non markovienne .....	39
b. Comparaison des prix immobiliers à une action versant un dividende .....	40
c. L'immobilier, actif bruité .....	41
d. Estimation du LTV(t) et DCR(t), quantités dérivées de H .....	42
<b><u>PARTIE 4 : PRETS IMMOBILIERS COMMERCIAUX</u></b> .....	<b>45</b>
I. <u>Introduction</u> .....	46
II. <u>Modèles optionnels</u> .....	47
III. <u>Modèles économétriques</u> .....	47
IV. <u>Biais et endogénéité des ratios</u> .....	47
a. Ratios d'origine.....	47
b. Biais d'un pool.....	48
V. <u>Exercice du RA</u> .....	48

VI. <u>Exercice du défaut</u> .....	49
a. Impact du type de structure.....	49
b. Les phases du défaut.....	49
c. Asymétrie du défaut.....	50
VII. <u>Exemple : les prêts multifamily</u> .....	50
<b><u>PARTIE 5 : AUTRES AXES DE REFLEXION</u></b> .....	52
I. <u>Débats récents sur le déclenchement du défaut ou du RA</u> <u>(résidentiel et commercial)</u> .....	53
a. Défaut commercial .....	53
b. Défaut résidentiel .....	53
c. Impact de la notation de crédit, des garanties, de la capacité à négocier .....	54
II. <u>Cas européens et français</u> .....	55
a. France.....	55
b. Etats-Unis et Grande-Bretagne.....	55
c. Pays-Bas.....	55
III. <u>Politique du logement et enjeux sociaux</u> .....	56
a. Efficacité des MBS.....	56
b. Emprunteurs prime et nonprime.....	57
c. Un exemple d'évaluation du coût d'une politique du logement.....	57
IV. <u>Option de déménagement</u> .....	58
V. <u>Enjeux de l'évaluation</u> .....	58
VI. <u>Théorie des jeux</u> .....	59
<b><u>CONCLUSION</u></b> .....	61
<b><u>BIBLIOGRAPHIE</u></b> .....	62

# **INTRODUCTION**

En 2002, l'encours des prêts résidentiels en France était de 350 milliards d'euros et en moyenne 30% du revenu disponible d'une famille est consacré à l'acquisition d'un bien immobilier. Pour la banque les risques associés aux prêts immobiliers (mortgages) sont de deux types : le risque de remboursement anticipé (RA) et le risque de défaut. L'importance de l'encours de ces titres justifie une quantification et une gestion précise de ces aléas. Une meilleure maîtrise de ceux-ci pouvant réduire le capital réglementaire associé, les pertes éventuelles en cas de défaut et les problèmes de réinvestissement dus à des RA provoqués par un contexte de taux faible.

Aux Etats-Unis existe depuis longtemps des agences hypothécaires (Fanny Mae, Freddie Mac, Ginnie Mae...) dont l'objectif est de réduire le coût d'accès à la propriété grâce au mécanisme de la titrisation. Les actifs émis, appelés MBS (mortgage-backed securities), sont associés à un pool de prêts, d'une manière plus ou moins sophistiquée, et reçoivent les flux engendrés par les titres de ce lot. En novembre 2003, l'EMFA ( European Mortgage Finance Agency) a été créée avec l'ambition d'assumer le même rôle que ses homologues américaines ; cette agence s'inscrit dans une volonté d'intégration des financements immobiliers entre les différents pays européens. Il existe beaucoup de disparités à l'intérieur de l'Europe sur ce type de produit et un certain degré d'uniformisation pourrait amener un meilleur fonctionnement global ainsi qu'une réduction des coûts de financement pour les particuliers. Dans un tel contexte une connaissance précise des flux et des risques associés aux mortgages est un enjeu d'importance. La littérature sur le sujet est essentiellement américaine, le but de ce mémoire est d'essayer de faire une synthèse de cette réflexion.

Deux méthodes de modélisation s'opposent et se complètent dans ce domaine. La première est d'ordre théorique, elle se base sur les options et sur les méthodes de pricing associées à la théorie de l'arbitrage. Elle suppose les emprunteurs rationnels et essaient de décrire structurellement leurs décisions de faire défaut ou d'effectuer un RA. La seconde approche est d'ordre économétrique et vise plus à décrire les comportements qu'à les expliquer, l'hypothèse de rationalité n'est pas centrale ici. Cette présentation est sommaire et un peu caricaturale, il s'agit plutôt d'un mouvement dialectique que d'une opposition frontale, l'approche pratique étant l'aiguillon de la réflexion théorique.

Les deux premières parties de ce mémoire sont consacrées à ces modélisations. La troisième essaye de présenter la manière dont elle s'articulent, en s'opposant ou en convergeant. D'autre part deux concepts importants sont aussi inclus dans cette partie : l'hétérogénéité et la modélisation des prix du logement. La quatrième est consacré aux prêts immobiliers commerciaux où le bien financé est générateur de cash flows (hôtels, commerce de détail, immeuble consacré à la location...). Ce type de prêt est aussi titrisé aux Etats-Unis sous l'appellation de CMBS (commercial mortgage-backed securities). Enfin la dernière partie explore des pistes nouvelles et présente quelques enjeux et quelques conséquences de cette réflexion.

**PARTIE 1 :**

**THEORIE OPTIONNELLE**  
**DES MORTGAGES**

# **I. Evaluation d'un mortgage par la théorie de l'arbitrage**

## **a. Notations et références**

Ce paragraphe reprend les notations de Ambrose, Buttimer, Thibodeau (2001). On peut également consulter Kau (1992), Kau (1995), ou encore Titman-Torous (1989) pour les bases de la modélisation optionnelle.

Le mortgage est un actif complexe, il se compose d'un prêt en général à taux fixe (parfois à taux variable) et de deux options : une option de défaut, une option de remboursement anticipé (RA). On ne peut pas dissocier ces trois actifs, ils sont scellés ensemble.

Notations :

- t : indice de temps, t parcourt  $[0, T]$
- $A(t,r)$  : valeur actuelle des paiements restant dus
- $B(t)$  : capital restant du
- $C(t,r,H)$  : valeur de l'option de RA sur un prêt sans risque de défaut
- $D(t,r,H)$  : valeur de l'option de défaut sur un prêt sans RA possible
- M : mensualité, supposée constante (le modèle peut s'adapter à d'autres cas)
- $V(t,r,H)$  : valeur de marché à t du mortgage

## **b. Option de RA**

Il s'agit d'un call portant sur la valeur de marché du mortgage  $V(t,r,H)$ , de strike le capital restant du  $B(t)$ . En l'exerçant l'emprunteur rachète son prêt et liquide son portefeuille (en conservant toutefois le bien immobilier). Il s'agit d'une option américaine, le RA pouvant s'effectuer à tout instant t de  $[0, T]$ . En général celui-ci est suivi d'un nouveau prêt souscrit à des conditions plus avantageuses (il existe cependant des exceptions)

## **c. Option de défaut**

Elle permet de vendre le bien immobilier pour un strike égal à la valeur de marché du prêt (saisie de l'actif mis en garantie), l'emprunteur liquide alors complètement sa position. Le défaut se produisant seulement aux dates de paiement, il s'agit d'un put européen composé (ne pas exercer l'option à une date permet de l'exercer plus tard)

## **d. Dynamiques des variables d'états**

Deux variables dirigent ces actifs :

- le taux d'intérêt : r
- la valeur du bien immobilier servant de garantie au mortgage : H

L'évolution de ces grandeurs est décrite par deux dynamiques stochastiques classiques.

- Pour le taux d'intérêt la règle dans la littérature est de choisir un processus CIR (Cox, Ingersoll, Ross (1985)), présentant un phénomène de retour à la moyenne :

$$d(r) = \gamma(\Theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r,$$

$\Theta$  : moyenne de long terme du taux court  
 $\gamma$  : vitesse du retour à la moyenne  
 $\sigma_r$  : volatilité du taux d'intérêt

- H suit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dH}{H} = (\alpha - s)dt + \sigma_H dz_H$$

$\alpha$  : rendement total de l'actif immobilier  
 $s$  : flux de consommation produit par l'actif (loyer)  
 $\sigma_H$  : volatilité de l'actif immobilier

H(t) présente alors une distribution log-normale et les rendements immobiliers une distribution gaussienne.

- Corrélation entre les deux mouvements browniens :  $dz_r \cdot dz_H = \rho$

#### e. Equation aux dérivées partielles d'évaluation

V(t,r,H) est solution de l'EDP suivante, d'inconnue X(t, r, H), obtenue grâce à la théorie de l'arbitrage :

$$\frac{1}{2}H^2\sigma_H^2 \frac{\partial^2 X}{\partial H^2} + \rho H \sqrt{r} \sigma_H \sigma_r \frac{\partial^2 X}{\partial H \partial r} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2 \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \gamma(\theta - r) \frac{\partial X}{\partial r} + (r - s)H \frac{\partial X}{\partial H} + \frac{\partial X}{\partial t} - rX = 0$$

On ne connaît pas explicitement les solutions d'une telle équation. La résolution se fait en utilisant des méthodes numériques de discrétisation ; en partant des conditions finales à T puis en remontant vers l'instant 0. On parle de méthodes backward (BWD) que l'on oppose aux méthodes forward (FWD) comme par exemple Monte Carlo.

Il est difficile d'aller de 0 à T (méthode FWD) car l'évaluation des options de défaut et de RA repose sur une estimation des états futurs : faut-il faire défaut maintenant ou attendre en espérant qu'un exercice plus tardif sera plus profitable ? (valeur temporelle de l'option). La démarche algorithmique d'évaluation est présentée ci-dessous.



**f. Valeurs à maturité**

- $V(T) = \min ( M, H(T) )$  : la dernière mensualité est versée si son montant n'excède pas la valeur du bien, dans le cas contraire l'emprunteur fait défaut et le dernier flux du prêt est  $H(T)$  (valeur de saisie de la garantie)
- $D(T) = \max ( 0, M - H(T) )$  : soit le défaut ne profite pas et la valeur de l'option est nulle, soit  $H(T) < M$  l'option est exercée et le gain est de  $M - H(T)$
- $C(T) = 0$  , à T l'option de RA n'a plus de valeur

**g. Valeurs aux dates intermédiaires**

Le but n'est pas de présenter ici l'algorithme complet avec tous ses détails, il s'agit simplement de donner l'intuition de la démarche.

- $V(t) = \min ( A(t) - D(t) - C(t), H(t), B(t) )$  : l'agent maximise sa position financière en choisissant de poursuivre le mortgage ou bien de l'interrompre en exerçant un de ses droits (il cherche à minimiser son passif)

Pour cela il compare :

- $A(t) - D(t) - C(t)$  : valeur actuelle des paiements à venir auxquels il déduit la valeur des deux options qu'il détient (cette expression représente sa position s'il décide de poursuivre le mortgage)
- $H(t)$  : examen de l'option de défaut
- $B(t)$  : examen de l'option de RA

La plus petite valeur indique alors sa décision.

- Aux dates des mensualités  $D(t)$  peut prendre plusieurs valeurs :
  - $D(t^+)$  : valeur de l'option si le mortgage se poursuit après  $t$
  - 0 si un RA est effectué
  - $V(t) - H(t)$  si l'option de défaut est exercée
- De même  $C(t)$  vaut :
  - $C(t^+)$  valeur de l'option si le mortgage se poursuit après  $t$
  - 0 si un défaut se produit
  - $V(t) - A(t)$  si un RA survient à  $t$

Pour implémenter le processus d'évaluation il est nécessaire de préciser plus avant ces valeurs en distinguant par exemple les dates des mensualités (défaut et RA possibles) des dates intermédiaires entre mensualités (seul le RA est possible). On voit apparaître dans cette formulation rapide les valeurs futures des options, il faut connaître  $D(t^+)$  pour en déduire  $D(t)$ , ceci est central pour l'application d'une méthode backward (d'où le nom de cette technique).

## II. Particularités des options appliquées aux mortgages

### a. Option de défaut

Alors que l'option de RA est simple (option américaine basique), la nature exacte de l'option de défaut n'est pas toujours précisée clairement dans la littérature car cet actif est relativement complexe à décrire.

Le défaut peut survenir aux dates de paiements mais pas aux dates intermédiaires entre deux mensualités. On pourrait penser dans un premier temps à une série de put européens indépendants avec des maturités correspondant aux dates des mensualités, il ne s'agirait donc pas d'une option mais d'une série d'options.

Cette approche est cependant incorrecte, l'exercice d'une de ces options neutralise immédiatement les suivantes, le défaut ne pouvant survenir qu'une fois (on reste ici au niveau basique où le défaut entraîne la saisie immédiate du bien sans possibilités de règlement du contentieux à l'amiable avec un retour à des paiements réguliers).

L'option américaine ne convient pas non plus, en raison de l'impossibilité d'exercice entre deux dates de paiements. Il s'agirait à la rigueur d'une option avec des fenêtres d'exercices.

La piste des options composées est parfois évoquée mais la structure et les cash-flows de cette modélisation ne sont pas toujours exposés clairement. Une option composée est une option sur option, elle donne le droit d'acheter à la date  $T_1$ , une option de maturité  $T_2 > T_1$ . Cette piste est celle choisie par Kau et al. (1992) ; le payoff de l'option de défaut à la date d'une mensualité, s'il n'y a pas défaut à ce moment, est constitué d'une option de défaut pour la prochaine échéance.

Il n'existe pas de formule exacte pour calculer la valeur d'une option américaine. Donc a fortiori pour un ensemble de deux options imbriquées, dont l'une est américaine, il est vain d'espérer trouver une formule d'évaluation.

La description précise de ces actifs n'est pas toujours développée en raison de la méthode d'évaluation utilisée. Le calcul se fait en utilisant des méthodes numériques et donc approchées. Il n'est pas nécessaire de préciser exactement le statut de ces titres, il suffit de pouvoir écrire les payoffs en cas d'exercice ou de non-exercice pour chaque date.

### b. Séparation des actifs

L'emprunteur détient deux options et a vendu une obligation au prêteur. A la date  $t$  si aucune des options n'est exercée sa position débitrice est :

$$V(t,r,H) = A(t,r) - C(t,r,H) - D(t,r,H) = A(t,r) - (C(t,r,H) + D(t,r,H))$$

Où :

- $V(t,r,H)$  : valeur de marché à  $t$  du mortgage
- $A(t,r)$  : valeur actuelle des paiements restant dus

- $C(t,r,H)$  : valeur de l'option de RA
- $D(t,r,H)$  : valeur de l'option de défaut

En écrivant cela on fait l'hypothèse implicite que ces trois actifs financiers sont dissociables et que la valeur totale s'obtient par un calcul algébrique. Or ces trois titres (le prêt et les deux options) n'existent pas séparément les uns des autres, on ne peut pas exercer l'option de défaut si l'on n'est pas engagé dans un mortgage. De plus l'exercice de l'option de défaut élimine l'option de RA et inversement, ces deux actifs ne sont pas séparables.

Il serait plus exact de parler d'une option d'interruption des versements pouvant prendre la forme d'un défaut ou d'un RA. On note parfois  $J(t, r, H)$  l'option d'interruption des cash flows (par défaut ou RA). En toute rigueur la position de l'emprunteur est :  $V - J$ . De plus  $J < C + D$ , car le défaut et le RA étant exclusifs l'un de l'autre, l'emprunteur détient un titre de valeur inférieure à la somme de ces deux options.

Ce caractère indissociable devrait à priori avoir des effets sur le pricing des titres. Cependant comme l'évaluation se fait par un algorithme, ces précisions théoriques sur la nature des titres ne sont pas nécessaires.

Pour terminer ce paragraphe, on peut évoquer une variante de la représentation traditionnelle et largement admise du RA (call) et du défaut (put).

Classiquement le put de défaut permet de vendre  $H$  contre un prix égal à  $V$  (valeur de marché du mortgage), on pourrait également se représenter le défaut comme un call permettant d'acheter  $V$  pour un prix égal à  $H$ . Ainsi l'emprunteur disposerait d'une option d'achat de  $V$  contre le capital restant du, non aléatoire, ou bien contre  $H$ , strike aléatoire (premier cas : RA, deuxième cas : défaut).

### c. Questions autour de l'évaluation sous $Q$ , probabilité risque-neutre

Références : Kau et al. (1992 et 1995)

La théorie de l'arbitrage aboutissant à l'EDP d'évaluation du mortgage suppose un cadre financier parfait. On peut se demander dans le cas de l'immobilier si cette situation est réaliste et si les techniques d'évaluation sont applicables sans problèmes. Voici une liste d'interrogations liées à ce point :

- Peut-on shorter un immeuble ? (problème de complétude)
- $H$  n'est pas divisible, on ne peut pas acheter 0.5 maison (problème de complétude)
- On considère en général qu'une famille ne peut détenir qu'une maison. Elle ne peut donc pas réaliser des arbitrages sophistiqués, l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est à interroger

### III. Approfondissements et variantes des modèles optionnels

#### a. Mortgages britanniques

Les modèles ont été élaborés sur des prêts américains mais leur transposition à d'autres pays avec des modalités de prêts différentes se fait sans difficultés. Cette théorie permet des adaptations aisées et efficaces.

Six quantités interviennent dans un prêt : le mortgage lui-même  $V$ , les paiements restant dus  $A$ , l'option de défaut  $D$ , l'option de remboursement anticipé  $C$ , l'assurance  $I$  (fraction de la perte éventuelle couverte par un assureur), la coassurance  $CI$  (fraction de la perte éventuelle assumée par le prêteur).

Cas du prêt à taux fixe classique: Azevedo-Pereira, Newton, Paxson (2002)

La différence avec le cas américain porte essentiellement sur l'assurance et la coassurance. Cet article est une adaptation de Kau et al. (1992)

Cas de l'« endowment mortgage » : Azevedo-Pereira, Newton, Paxson (2003)

Le principe n'est pas le même que pour le mortgage classique. L'emprunteur paye à la banque les intérêts sur le capital et parallèlement verse à une société d'assurance des mensualités destinées, à terme, à rembourser le principal à la banque. Ces mensualités sont capitalisées à taux variable et supportent donc un risque de taux. L'emprunteur ne sait pas à l'avance la somme qu'il devra verser s'il veut faire un RA, contrairement au mortgage classique où le capital restant du est connu dès le début du prêt pour chaque date. L'intérêt de cette structure est essentiellement fiscal, elle est assez similaire au cas hollandais (cf. Partie 5, II)

Les deux graphiques ci-dessous donnent la valeur des options dans le cas de l'endowment mortgage, en fonction des valeurs des variables d'états  $r$  et  $H$ . ( $H = 1$  correspond à la valeur d'achat du bien)

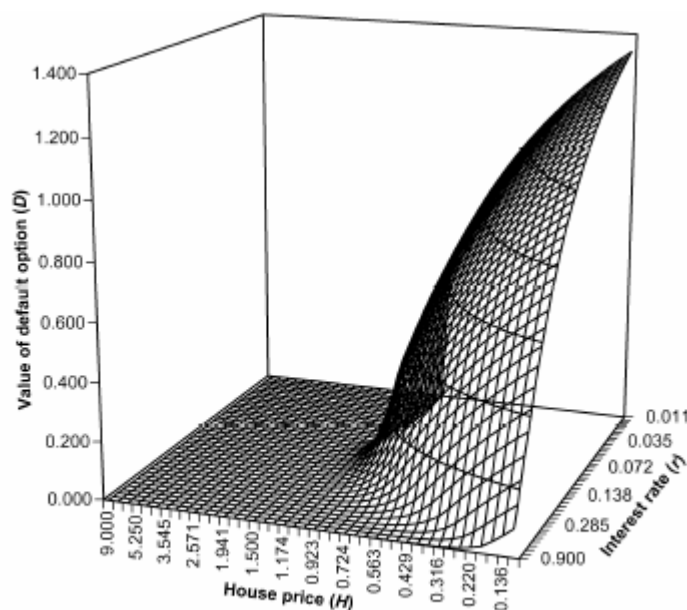


Figure 4. Default option ( $D$ ) (endowment mortgage with an early termination penalty).

L'option de défaut devient chère lorsque la valeur du bien immobilier a fortement décri. Ce phénomène est un peu atténué par des taux élevés car dans cette situation, la valeur de marché du prêt baisse également en parallèle, limitant ainsi la situation de negative equity (  $LTV > 1$  , le prêt coûte plus cher que la propriété financée)

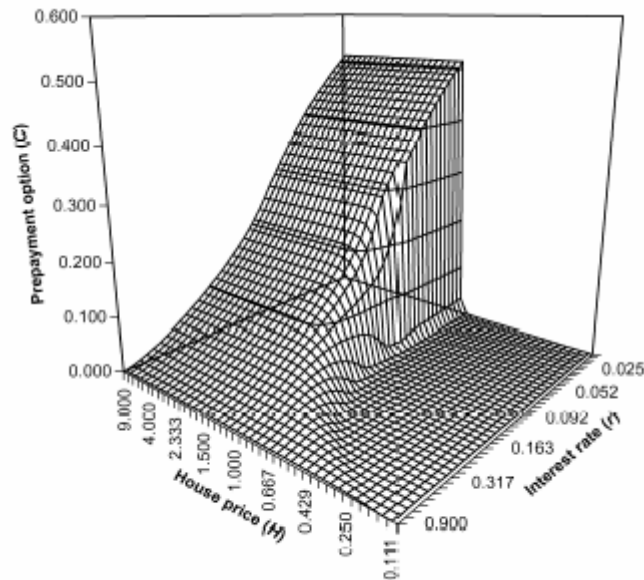


Figure 5. Value of prepayment option (C) (endowment mortgage with an early termination penalty).

L'option de RA réagit principalement au taux d'intérêt  $r$ , un taux faible implique une option dans la monnaie (partie gauche du dessin). Lorsque  $H$  est faible, l'option de défaut devient prédominante (partie droite du graphique), la probabilité de son exercice réduit simultanément la probabilité d'exercice du call, ainsi sa valeur devient faible même si les taux sont bas.

## b. Intégration des pénalités de remboursement anticipé

Des études économétriques portant sur les remboursements anticipés prédits par certains modèles théoriques ont mis en exergue un certain sous-exercice de cette option. Kelly, Slawson (2001) ont alors proposé une intégration des pénalités de RA afin d'expliquer ce phénomène à partir de la théorie des options, les résultats obtenus sont concluants. Ainsi dans l'exemple des pénalités dégressives (5% la première année sur le capital restant du à la date du RA, 4% la deuxième, ...), il est parfois plus pertinent d'attendre la prochaine baisse plutôt que d'exercer l'option immédiatement. Un modèle n'intégrant pas cette dimension produira inévitablement des sous-exercices. De plus cette modification théorique permet d'étudier l'efficacité d'un type de pénalité par rapport à un autre type. Le modèle optionnel s'adapte sans grandes difficultés à cette problématique.

Fu, Lacour-Little, Vandell (2003) étudient le RA sur les prêts commerciaux. Dans ce type de prêt il arrive parfois que l'on considère les pénalités de RA comme entièrement invalidantes ou compensant pleinement le prêteur dans le cas d'un

exercice de ce droit par l'emprunteur. Cet article remet en question cette affirmation et prouve que là aussi le RA doit être pris en compte, on ne peut pas l'évacuer. Le RA et le défaut ont une certaine substituabilité, interdire le premier va amener une modification du second, on risque de voir apparaître des défauts motivés non pas par des difficultés financières mais plutôt par une stratégie de contournement de l'interdiction de RA.

Demey, Frachot, Riboulet (2000) vont même jusqu'à prouver que la juste facturation de l'option de RA à l'emprunteur par la banque n'est pas toujours possible, le prêteur supportant toujours un risque de RA.

### **c. Intégration des frictions**

La critique des tenants de l'approche empirique (voir Partie 2) repose sur l'influence de variables non financières dans les décisions de l'emprunteur. En réponse Kau, Slawson (2002) proposent une version évoluée du modèle optionnel permettant d'intégrer les coûts de transaction pour l'exercice de ces options, la possibilité de terminaisons sous-optimales (pour raison de divorce, de chômage...) et la possibilité de non exercice des options dans une situation où il est optimal (théoriquement) d'y procéder. Cet article reprend et intègre les résultats de Stanton (1995 et 1996), voir partie 3, paragraphe II.

L'expression du modèle devient assez lourde en raison des nombreuses possibilités à envisager mais il reste programmable. Cependant l'hétérogénéité des populations et des coûts de transaction, ainsi que les effets géographiques ne sont pas intégrés. L'article de Pavlov (2001) présente une tentative de modélisation allant dans ce sens.

### **d. Pricing de tranches de CMO**

Les premiers MBS (mortgage-backed securities) étaient des structures pass-through. Le véhicule chargé de la gestion passait directement les flux qu'il recevait des emprunteurs aux investisseurs, en prenant une marge au passage. Des structures plus sophistiquées sont apparues peu à peu, introduisant des concepts de tranches, de subordination, d'« overcollateralization ». Ces techniques permettent de gérer les risques de RA et de défaut et dans le même temps de s'adapter à la demande des investisseurs en leur proposant le type de produit qu'ils souhaitent.

McConnell, Singh (1994) utilisent le modèle optionnel d'évaluation des mortgages pour le pricing des tranches de CMO (collateralized mortgage obligations), l'article ne suppose pas de risque de défaut. Les équations deviennent relativement lourdes mais la résolution numérique reste faisable.

Les paramètres déterminants dans ce modèle sont ceux qui régissent le comportement de RA des emprunteurs, les résultats du pricing y sont relativement sensibles. Ainsi deux tranches de CMO présentant les mêmes caractéristiques externes (maturité, taux, chaîne des flux, séniorité...) ne sont pas assimilables parfaitement, les pools afférents pouvant différer par le comportement de RA des emprunteurs les composant. Les actifs titrisés, c'est-à-dire les prêts, et leurs flux constituent le cœur de l'évaluation.

**e. Décomposition de l'option de défaut**

Le défaut n'est pas un événement simple, on peut le définir de plusieurs manières (une ou plusieurs mensualités non honorées, début de la procédure judiciaire, saisie du bien immobilier garantissant le mortgage...).

Ambrose, Buttimer (2000) décomposent le défaut en deux options élémentaires, l'option de non-paiement d'une échéance et l'option de renoncement au bien immobilier (on peut la définir par exemple comme le non-paiement de trois mensualités). La différence principale avec la modélisation en une option porte sur la possibilité donnée en pratique à l'emprunteur, après avoir été déficient sur une ou deux échéances, de revenir à une situation normale en payant les sommes dues précédemment. Il peut d'ailleurs s'agir d'une stratégie financière de sa part lui permettant d'étaler des paiements en cas de difficultés temporaires. Ici encore, le modèle théorique s'adapte à cette évolution sans difficultés.

L'intérêt pour l'organisme chargé de collecter les mensualités est direct. Il s'agit de mieux gérer les prêts en contentieux en essayant de déterminer quels sont ceux qui iront inévitablement au défaut, quels sont ceux qui retourneront d'eux-mêmes à une situation normale (il n'est pas utile de faire porter les efforts de négociation sur ces contrats), et surtout quels sont les prêts qui pourront revenir à une situation régulière si la banque adopte la bonne politique de gestion. La saisie du bien garantissant le prêt est coûteuse et représente souvent une perte, il est préférable que l'emprunteur continue à honorer ses paiements. Connaître les circonstances amenant à l'exercice de ces options, ainsi que les stratégies permettant d'éviter trop de pertes dues aux défauts effectifs est un enjeu important pour la gestion efficace des contentieux.

**f. Utilisation des modèles optionnels comme instruments d'analyse**

Les prêts portant sur un nominal plus élevé que la moyenne ont en général un taux supérieur. Ces prêts importants sont moins titrisés par les agences de refinancement américaines et certains auteurs voient là l'explication de cette différence. La titrisation réduit le risque spécifique des prêts par diversification, réduisant ainsi le taux demandé par le marché et donc les taux que les banques appliquent à leurs emprunteurs dans le cadre d'un mortgage.

Ambrose, Buttimer, Thibodeau (2001) acceptent ce point de vue mais ils le complètent par une analyse basée sur la modélisation optionnelle. Leur explication repose sur la différence de volatilité des prix immobiliers entre les propriétés de taille usuelle et les celles de taille supérieure ; ces dernières étant plus volatiles. Or la modification de la volatilité de  $H$  dans l'approche théorique amène un taux exigé plus important. Le spread s'explique donc en partie par les mécanismes de titrisation mais aussi par cette différence de volatilité immobilière.

Bennett, Peach, Peristiani (2000) utilisent quant à eux la théorie optionnelle pour détecter les seuils déclenchant les refinancements. Pour cela ils étudient la sensibilité du mortgage à la volatilité avec la grecque Véga et déterminent le moment optimal pour l'exercice du RA. Cette approche permet de gérer une hétérogénéité des seuils de RA parmi une population d'emprunteurs.

**g. Variante algorithmique**

L'évaluation du mortgage et des options s'effectue à l'aide d'un algorithme, les solutions exactes de l'EDP n'étant pas connues. La programmation est relativement lourde et toute amélioration de celle-ci est intéressante. Hilliard et al. (1998) présentent une variante à la méthode développée par Kau en utilisant une discrétisation des distributions de probabilité différente. Les résultats de ces calculs donnent des valeurs proches de celles obtenues par la méthode classique dans la plupart des cas ; d'autre part le temps de calcul est significativement réduit.



**PARTIE 2 :**

**MODELES**

**ECONOMETRIQUES**

# I. Principes des modèles économétriques

## a. Taux de hasard

La modélisation économétrique des temps de défaut et de RA s'inspire des fonctions de survie utilisées dans la modélisation médicale où l'on s'intéresse à la durée de vie d'un malade. (Cox, Oakes 1984). Le malade est remplacé par le mortgage et le décès par le RA ou le défaut.

On reprend ici les notations utilisées dans l'article Ambrose-Capone (2000) pour exposer les principes de cette modélisation.

- $T$  : variable aléatoire représente le temps ou le mortgage « meurt » par défaut ou par RA.  $T$  prend ses valeurs dans  $[0, +\infty]$ . On distingue dans l'analyse détaillée le temps de RA et le temps de défaut. Pour la suite de cette présentation  $T$  représente le temps mis par le mortgage pour mourir indépendamment du type de terminaison.
- $f(t)$  : densité de  $T$
- $F(t)$  : fonction de répartition de  $T$ , probabilité que le mortgage soit achevé avant la date  $t$ .

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds = \Pr(T \leq t).$$

- $S(t)$  : fonction de survie, probabilité que le mortgage soit encore actif après la date  $t$

$$S(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t).$$

- $I(t, \Delta t)$  : probabilité de terminaison entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , sachant que le mortgage est encore actif à  $t$ , il s'agit d'une probabilité conditionnelle

$$I(t, \Delta t) = \Pr(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)$$

On définit enfin la notion fondamentale de taux de hasard  $h(t)$ , elle représente la probabilité de terminaison instantanée par unité de temps à l'instant  $t$ .

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Pr(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Exemple :  $h(t) = 0.04$  signifie que pour  $\Delta t$  petit :

$$\Pr(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t) = 0.04 * \Delta t$$

Un mortgage a en général une durée de vie d'au moins 15 ans (180 mois), on peut prendre  $\Delta t = 1$  mois (1 est suffisamment petit devant 180).

$h(t) = 0.04$  signifie alors que le mortgage a 4% de chance de se terminer entre le mois  $t$  et le mois  $t+1$ , sachant qu'il est encore en vie à la date  $t$ .

## b. Principe de la modélisation

On observe les fréquences des événements (RA et défaut) puis on estime les paramètres du modèle afin de reproduire au mieux ces observations. Il s'agit d'une analyse ex-post, les paramètres sont choisis pour être au plus proche des données historiques. Rien ne permet d'assurer que dans le futur ces paramètres seront les meilleurs possibles, la prévision est problématique avec ce genre de modèle (voir partie 3, paragraphe I, pour le débat modèles formes réduites / modèles structurels)

Les regressseurs interviennent dans l'estimation suivante :

$$h(t) = h_0(t) * \exp(\beta_1 v_1(t) + \beta_2 v_2(t) + \dots + \beta_n v_n(t))$$

Où :

- $h_0(t)$  : fonction de base, elle capture seulement les conséquences du vieillissement sur l'ensemble des mortgages estimés. On peut choisir de lui donner une forme spécifique, Schwartz, Torous (1989) choisissent une fonction log-logistique, on pourrait également envisager un polynôme de degré 2 :  $h_0(t) = a + bt + ct^2$ .
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  : les coefficients à estimer
- $v_1(t), v_2(t), v_n(t)$  : les regressseurs influant sur le taux de hasard, ils présentent la particularité importante d'être dépendants du temps, ceci permet un suivi dynamique de leurs effets (on peut par exemple inclure le LTV(t) dans l'estimation plutôt que de se contenter du LTV(0))

## c. Estimation

Elle se fait par maximum de vraisemblance. Si l'on choisit une expression particulière pour  $h_0(t)$ , l'estimation déterminera les paramètres de cette fonction (a, b, c dans le cas du polynôme de degré 2). Cependant il n'est pas nécessaire de préciser une forme pour la fonction de base pour obtenir les coefficients  $\beta_i$ , il s'agit d'une particularité de la modélisation par taux de hasard. L'estimation se fera alors en utilisant un maximum de vraisemblance partiel, Pavlov (2001). L'intérêt de cette méthode est de mieux capturer les variations temporelles de chaque variable et leurs effets.

Les variables principales influant sur l'exercice de ces options sont :

Pour le RA :

- le refinancement (taux plus faible permettant une baisse du coût du crédit)
- l'âge du prêt

Pour le défaut :

- LTV(0) ou LTV(t) selon les études
- la volatilité des prix du logement
- l'âge du prêt

Dans le cas d'un prêt portant sur de l'immobilier commercial les ressources de l'emprunteur sont mieux connues, elles s'expriment par exemple avec le DCR (DCR(0) ou DCR(t) ), l'influence de ce ratio est très significative sur le défaut. (cf. partie 4 pour plus de détails sur ces grandeurs)

Cette liste de régresseurs est très sommaire et assez réductrice, les articles de recherche publiés sur le sujet visent à la préciser, la rendre plus exhaustive et à comprendre les mécanismes de décision des emprunteurs.

**d. Approfondissement de la méthode : risques concurrents et hétérogénéité de population**

Le défaut et le RA dans un mortgage ne sont pas indépendants. Par exemple si l'option de défaut est exercée, l'option de RA à une valeur nulle et inversement. La mesure du temps moyen de RA ne peut donc pas se faire sans prendre en compte le temps moyen de défaut en parallèle. Les premiers articles sur le sujet éliminaient en général une des deux options, les estimations obtenues présentaient alors un biais systématique et ne pouvaient pas prétendre donner une vision précise de ce temps. La dimension « risques concurrents » doit être intégrée à l'économétrie de ces modèles.

Une autre amélioration de la mesure des temps de terminaisons consiste à prendre en compte l'hétérogénéité des populations. Les emprunteurs ne sont pas toujours des financiers avertis, et ils réagissent avec plus ou moins de rapidité aux incitations (après une baisse des taux on observe par exemple des RA mais cela n'est pas automatique, certains particuliers n'effectuant pas cette opération). L'hétérogénéité de population peut aussi être liée à des disparités géographiques, culturelles...

Cette diversité est difficile à mesurer, et l'on parle d'hétérogénéité inobservable. Cependant elle existe et influe sur l'estimation, on résout ce problème grâce à la méthodologie d'Heckman, Singer (1984).

On pourra consulter les articles suivants : Deng, Quigley, Van Order (2000), Pavlov (2001), Huang-Ondrich (2002), Heckman, Singer (1984). La partie 3, paragraphe II poursuit cette réflexion.

**e. Lien avec l'approche optionnelle**

Le débat empiristes / théoriciens (partie 3, I) a amené une évolution dans le choix des régresseurs, ils apparaissent plus liés aux modèles théoriques que dans les premiers travaux économétriques sur le sujet. Huang et Ondrich (2002), Deng et al. (2000) introduisent par exemple un proxy pour mesurer à quel degré l'option de RA est dans la monnaie et comment ce régresseur influe sur les probabilités de défaut et de RA.

Cette interaction se fait également dans l'autre sens. Les résultats pronostiqués par les modèles optionnels sont testés et souvent validés, dans le cas contraire le modèle doit être perfectionné. Cela fut par exemple le cas lorsque les modèles économétriques détectèrent un sous-exercice des options, infirmant les prévisions des modèles d'arbitrage. La correction s'est faite en introduisant les coûts de transactions, les hétérogénéités de population et de coûts de refinancement (Stanton 1995 et 1996).

#### f. Un exemple d'étude économétrique

Afin d'illustrer plus concrètement la méthodologie économétrique, ce paragraphe est destiné à exposer la problématique et les résultats de l'article de Ambrose et Capone (2000). Beaucoup d'articles auraient pu servir à présenter cette démarche mais ils ont déjà été cités plusieurs fois, d'autre part ce travail est un approfondissement original de la notion de taux de défaut.

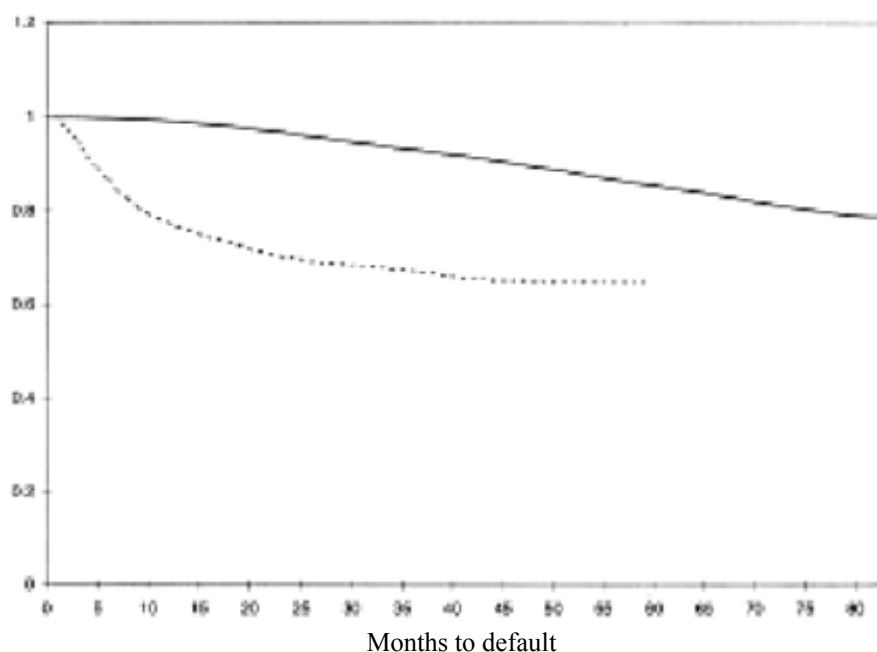
Il s'inscrit dans une perspective de gestion du risque de crédit pour les prêteurs, le défaut d'un emprunteur se terminant souvent par une perte pour la banque.

Aux Etats-Unis s'est développée une réflexion visant à améliorer la gestion des prêts défectueux. Elle cherche par exemple à distinguer les prêts et les emprunteurs pouvant revenir à une situation normale dans le paiement des mensualités si on leur accorde quelques facilités, de ceux qui feront très rapidement à nouveau défaut sur leurs engagements. Ambrose et Capone raffinent la méthode des taux de hasard en travaillant sur le taux du premier défaut et sur celui du deuxième défaut ; l'objectif est de déterminer les variables influençant ces exercices.

Ce graphique présente les fonctions de survie pour le premier défaut (courbe du dessus) et le deuxième défaut (la qualité de ce schéma n'est pas optimale).

Axe vertical : probabilité de survie, graduation de 0 à 1,2

Axe horizontal : durée de vie, graduation mensuel de 0 à 80 mois

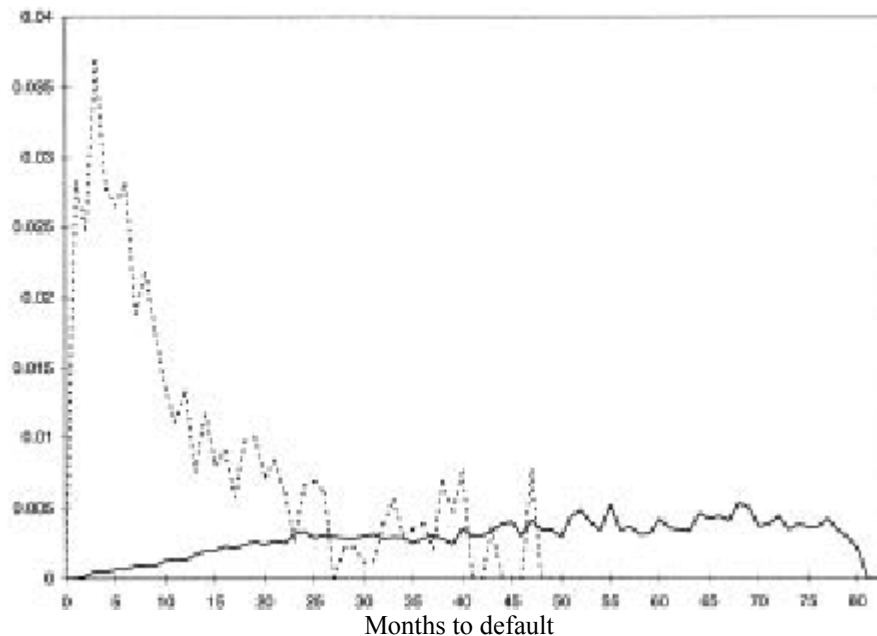


Pour un ensemble de prêts venant d'être souscrits, 98% n'ont pas fait défaut après 10 mois. La deuxième courbe donne la fonction de survie des prêts ayant déjà présenté une fois cette déficience mais étant revenus à une situation courante ; le taux du deuxième incident au bout de 10 mois est de 20% ( 80% des prêts sont encore en situation courante). Le comportement est très différent entre ces deux situations, une première interruption des paiements indique un risque plus important pour la banque pour ces prêts par rapport aux prêts vierges de tout défaut.

On peut illustrer ce phénomène avec le taux de hasard, c'est-à-dire la probabilité que l'emprunteur fasse défaut dans le mois à venir sachant qu'il n'a pas fait (ou refait) défaut jusqu'ici.

Axe vertical : graduation de 0 à 0,04

Axe horizontal : graduation de 0 à 80 mois



La courbe en trait plein est le taux de premier incident, celle en pointillés correspond au deuxième.

La différence est très nette dans les 24 premiers mois. Le risque des emprunteurs ayant déjà eu une difficulté de paiement est beaucoup plus élevé ; cependant après cette période de deux ans on peut considérer que les prêts survivants présentent le même risque que ceux n'ayant jamais présenté d'interruption des mensualités, les taux de hasard étant du même ordre (la plus grande volatilité observable sur la courbe en pointillés étant probablement liée à un effet de raréfaction des données).

Ces analyses décrivent le comportement du pool, la suite de l'article essaye d'expliquer celui-ci et de déterminer les variables causant ces phénomènes. Pour cela les auteurs reformulent les taux de hasard basiques, choisissent des régresseurs et effectuent l'estimation.

Voici quelques variables utilisées dans le modèle :

Dependent Variable	
<i>TIMETO</i>	Either the number of months between mortgage origination and default (in the case of first default) or the number of months between first default reinstatement and second default
Independent Variables	
Financial characteristics:	
<i>PREPAY</i>	1 minus ratio of the present value of mortgage payments at the market interest rate to the present value of mortgage payments at the contract rate; measures whether prepayment option is "in-the-money"
<i>PROBNEQ</i>	Probability that borrower's equity ratio is negative (see Deng et al., 1994)
<i>LTVFLAG</i>	Dummy variable indicating borrowers with loan-to-value ratios greater than 97.5 percent at mortgage origination
<i>PTIFLAG</i>	Dummy variable indicating borrowers with payment-to-income ratios greater than 30 percent at mortgage origination
Borrower characteristics:	
<i>RACE</i>	Borrower's race (1 = minority/0 = white)
<i>FTIME</i>	First-time homebuyer (1 = yes/0 = no)
<i>INC60</i>	Borrower income less than or equal to 60 percent of area median income
<i>INC80</i>	Borrower income greater than 60 and less than or equal to 80 percent of area median income
<i>INC100</i>	Borrower income greater than 80 and less than or equal to 100 percent of area median income
<i>INC120</i>	Borrower income greater than 100 and less than or equal to 120 percent of area median income
<i>INC120 +</i>	Borrower income greater than 120 percent of area median income
<i>ENTRY</i>	Time trend variable denoting the month of reinstatement
State specific characteristics:	
<i>EMPLRATE</i>	Monthly state unemployment rate

*PREPAY* et *PROBNEQ* sont des proxys testant si les options sont dans la monnaie (problématique des risques concurrents)

*LTVFLAG* et *PTIFLAG* sont des indicateurs pour les situations un peu extrêmes. Un LTV supérieur à 97.5 et une charge de la dette supérieure à 30% du salaire sont des situations assez peu fréquentes, l'utilisation des dummy à pour but d'éviter que ces cas particuliers ne viennent fausser les estimations.

La série des *INC* teste l'influence du salaire sur les défauts.

L'estimation vise à déterminer les  $\beta_i$  dans une expression similaire à celle-ci :

$$h(t) = h_0(t) * \exp(\beta_1 v_1(t) + \beta_2 v_2(t) + \dots + \beta_n v_n(t))$$

Où :  $h(t)$  : taux de hasard pour le défaut

$h_0(t)$  : fonction de base

$v_1(t), v_2(t), v_n(t)$  : les régresseurs influant sur le taux de hasard

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  : les coefficients à estimer

(Le modèle de l'article est en fait légèrement modifié par rapport à cette écriture basique, l'objectif n'est ici que présenter l'esprit de l'estimation).

Un  $\beta$  positif indique que le risque de défaut augmente avec cette variable, un  $\beta$  négatif indique que le risque baisse quand le régresseur augmente.

Les résultats sont présentés dans les tableaux ci-après. La première colonne donne la liste des régresseurs, la deuxième les  $\beta$  associés pour le taux de RA, la troisième les  $\beta$  pour le taux de défaut et la quatrième est un test de la significativité de ces variables (\*\*\*) indiquant un fort degré de significativité).

La plupart des facteurs sont doublés, par exemple PREPAY et I\_PREPAY. Cette technique permet une estimation simultanée des taux de premier et deuxième défaut. Le coefficient de PREPAY représente l'impact de cette quantité sur le taux de premier défaut, I\_PREPAY sur le taux du deuxième.

En comparant par exemple PROBNEQ et I\_PROBNEQ pour la troisième colonne on peut par exemple constater que le risque d'avoir une situation de « negative equity » a un impact positif sur le premier défaut (coefficient de + 0,021). L'emprunteur cherche à profiter de cette situation en faisant défaut, il peut ainsi échanger un prêt contre un bien immobilier de moindre valeur ( $LTV > 1$ ). Tandis que cette donnée ne semble pas entrer en ligne de compte pour le deuxième défaut (coefficient de - 0,002 presque nul).

Cet article a permis à ses auteurs de mettre en évidence le comportement de certains emprunteurs qui vont utiliser le défaut temporaire comme un moyen de gestion de leurs liquidités. Ils ne présentent pas alors vraiment un risque de crédit important pour la banque, même s'ils peuvent être déficients à répétition.

Table 3. (continued)

	Prepay	Default	Analysis of Variance ( $\chi^2$ )
	(1047.8)	(9.2)	
<i>I_PTIFLAG</i>	0.000	0.010	—
	—	(0.1)	
<i>LTVFLAG</i>	-0.004	0.013	0.1
	(0.0)	(0.1)	
<i>I_LTVFLAG</i>	—	0.102	—
	—	(0.7)	
<i>I_TIMEIN</i>	—	-0.112***	—
	—	(49.3)	
<i>ENTRY</i>	-0.034***	-0.026***	288.7***
	(260.7)	(29.2)	
<i>I_ENTRY</i>	—	0.045***	—
	—	(69.6)	
<i>Likelihood ratio</i>		255552.69***	

Notes: The variables preceded by *I* indicate the interaction of the initial state dummy variable, where  $I = 1$  if the observation is for a borrower who has reinstated out of previous default. \*\*\*Significant at the 1 percent level \*\*Significant at the 5 percent level. \*Significant at the 10 percent level.



Table 3. Competing risk model of mortgage termination, maximum-likelihood estimates ( $\chi^2$  statistics in parentheses).

	Prepay	Default	Analysis of Variance ( $\chi^2$ )
<i>INTERCEPT</i>	- 10.562*** (16777.1)	- 4.646*** (131.8)	16908.5***
<i>MONTH</i>	0.321*** (9753.4)	0.055*** (302.9)	10046.0***
<i>I_MONTH</i>	—	- 0.093*** (46.7)	46.7***
<i>MONTH2</i>	- 0.003*** (8300.2)	0.000*** (138.9)	8431.5***
<i>I_MONTH2</i>	—	0.000 (0.0)	—
<i>PREPAY</i>	- 0.157*** (250.0)	0.049*** (2345.5)	2596.0***
<i>I_PREPAY</i>	—	- 0.010 (2.1)	—
<i>PROBNEQ</i>	- 0.011*** (222.1)	0.021*** (307.8)	533.3***
<i>I_PROBNEQ</i>	—	- 0.002 (0.3)	—
<i>EMPLRATE</i>	- 0.054*** (133.8)	0.080*** (68.4)	203.6***
<i>I_EMPLRATE</i>	—	0.091*** (15.5)	—
<i>RACE</i>	0.240*** (727.6)	- 0.161*** (118.0)	849.6***
<i>I_RACE</i>	—	0.194*** (19.7)	—
<i>FTIME</i>	0.036*** (25.9)	0.020 (1.8)	27.5***
<i>I_FTIME</i>	—	- 0.104** (4.3)	—
<i>INC60</i>	0.311*** (698.8)	0.020 (0.7)	699.3***
<i>INC80</i>	0.126*** (119.8)	0.068*** (7.7)	127.1***
<i>INC100</i>	0.033*** (7.0)	- 0.003 (0.0)	7.0***
<i>INC120</i>	- 0.023 (2.3)	- 0.086*** (7.3)	9.5***
<i>I_INC60</i>	—	- 0.886*** (83.4)	—
<i>I_INC80</i>	—	- 0.913*** (81.0)	—
<i>I_INC100</i>	—	- 0.771*** (50.0)	—
<i>I_INC120</i>	—	- 0.604*** (23.8)	—
<i>PTIFLAG</i>	- 0.239***	- 0.046***	1055.7***

## II. Méthodes économétriques alternatives

### a. Modélisation par fonction logistique

La démarche est différente de celle du taux de hasard.

On introduit une fonction d'utilité indirecte pour l'emprunteur, exprimée à l'aide de plusieurs régresseurs.

Par exemple :

$$W_{j,m,y,t} = \beta_0 + \beta_1 DD_j + \beta_2 AGE_{j,y,t} + \beta_3 AGE_{j,y,t}^2 + \beta_4 JP_{j,m,y,t} \\ + \beta_5 BJP_{j,m,y,t} + \beta_6 PVDEP_{j,t} + \mu_{j,m,y,t},$$

$j,m,y,t$  sont des indices liés à l'identification de l'emprunteur, sa localisation, la date de début du prêt, le temps.

La probabilité de défaut est modélisée avec la fonction logistique en posant :

$$\Pr(\text{default}) = \frac{e^{W_{j,m,y,t}}}{1 + e^{W_{j,m,y,t}}}$$

L'estimation s'effectue par maximum de vraisemblance. Un coefficient  $\beta$  positif indique un impact positif sur la probabilité de défaut ; si le régresseur associé augmente, le risque de défaut aussi. On ne s'intéresse ici qu'au signe du coefficient et à son caractère significatif, sa valeur est difficilement interprétable dans l'absolu (problème d'unités entre les différents régresseurs).

Cette méthode est en fait une discrétisation des taux de hasard. Lorsque les données comportent des plages vides l'approche de Cox devient problématique ; l'utilisation d'une fonction logit permet de surmonter cet écueil.

D'autre part, avant la parution de l'article de Deng et al. (2000), il n'était pas possible de prendre en compte l'aspect risques concurrents avec les taux de hasard, la version discrétisée s'imposait. Ce problème est mis en évidence dans l'article de Deng et al. (1996), les auteurs estiment dans un premier temps les RA et les défauts avec l'approche de Cox, puis pour prendre en compte la dépendance des terminaisons possibles du mortgage ils estiment un modèle logit.

Pour plus de détails sur les avantages et les inconvénients de ces deux techniques on pourra consulter les articles suivants :

- Clapp et al. (2001)
- Calhoun, Deng (2002)
- Pennington (2003)
- Archer, Ling, McGill (2003)
- Goldberg, Capone (1998 et 2002)

## b. Méthodes non-paramétriques

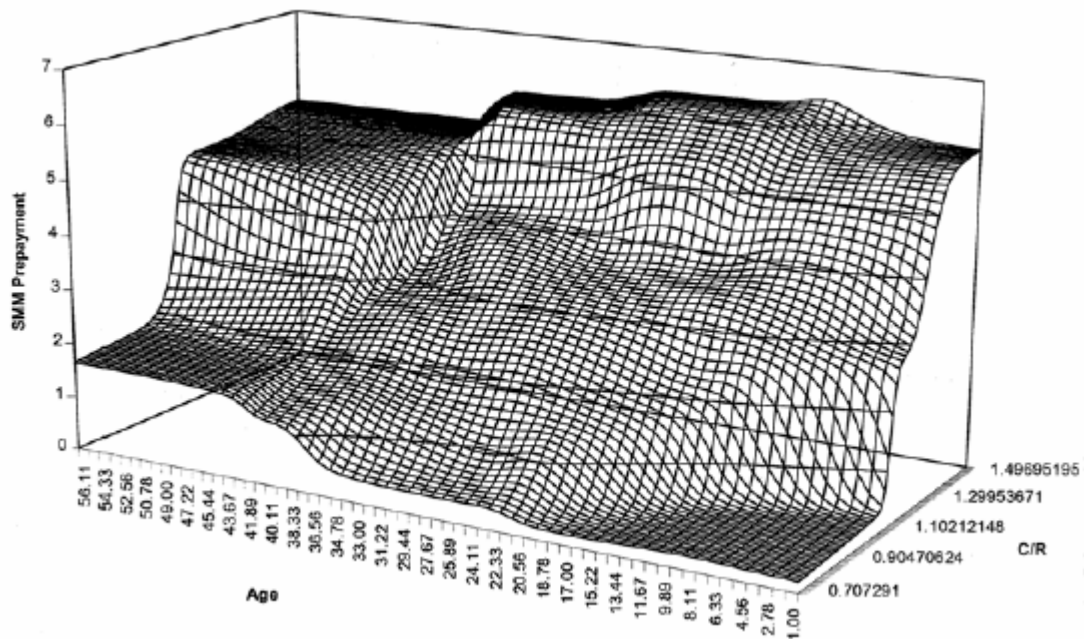
Les comportements de RA et de défaut sont des phénomènes complexes et fortement non-linéaires, spécifier une forme pour les probabilités associées est un choix ambitieux et souvent réducteur. Il est assez improbable qu'une expression mathématique donnée puisse rendre compte entièrement de toutes les variations. On pourrait essayer de trouver des formules compliquées mais cela se ferait au détriment du principe de parcimonie et la lourdeur d'implémentation viendrait probablement annulée les gains obtenus par ces efforts.

On distingue les méthodes paramétriques où l'on donne une structure mathématique particulière aux probabilités, comme cette formule :

$$\Pr(\text{default}) = \frac{e^{W_{j,m,y,t}}}{1 + e^{W_{j,m,y,t}}}$$

des méthodes non-paramétriques où les distributions proviennent directement des données brutes.

On obtient par exemple ce genre de surface issue de Maxam, Lacour (2001) :



Cette représentation est obtenue par une technique de lissage : la méthode des noyaux. Elle présente le taux de RA mensuel en fonction de l'âge du prêt et de l'incitation au RA (C/R est le rapport entre le taux du prêt et le taux actuel). Il semble vain de chercher une formule mathématique la décrivant exactement.

Deux articles discutent de choix : Maxam, Lacour (2001) et Lacour, Marschoun, Maxam (2002). Cette approche donne de bons résultats par rapport à la méthode de Cox ou à la fonction logit. Elle présente cependant un inconvénient majeur, le nombre

de variables doit être faible (limité à 4 ou 5 dans ces deux articles) alors que les techniques classiques peuvent utiliser jusqu'à 20 régresseurs.

Les auteurs se dirigent alors vers une démarche semi-paramétrique, dans un premier temps ils estiment un modèle non-paramétrique et un modèle paramétrique classique (taux de hasard par exemple). Puis en comparant les graphiques obtenus pour le RA et le défaut ils cherchent à modifier le deuxième modèle afin de le rendre plus réaliste. On aboutit ainsi à une méthode de Cox modifiée, plus performante que la version simple et permettant d'utiliser un grand nombre de régresseurs en profitant des informations fournies par la démarche non-paramétrique.

**PARTIE 3 :**

**APPROFONDISSEMENTS**  
**DES MODELISATIONS**

## **I. Modèles optionnels ou modèles économétriques ?**

Différentes pistes ont été explorées dans la littérature pour étudier les mortgages et certaines oppositions sont apparues peu à peu. Ces débats se recoupent entre eux, et si l'on veut simplifier à l'extrême ils opposent les tenants de la modélisation par la théorie de l'arbitrage et les options (Kau 1992 est l'exemple de référence) aux partisans d'une approche strictement économétrique. Cependant il s'agit là d'une vision caricaturale. Ces deux approches ont en fait interagi ; elles ont amené des évolutions intéressantes mais parfois en s'opposant.

Ces lignes de démarcation sont en fait assez floues et pour en donner un aperçu on présentera cette réflexion sous différents angles.

### **a. Critique des modèles empiriques par les partisans de la modélisation optionnelle**

- L'estimation se fait sur données historiques, elle ne peut prétendre qu'à une description du passé, rien n'assure que ces paramètres estimés sont les meilleurs pour prévoir le futur
- l'hypothèse de rationalité des investisseurs permet d'élaborer des modèles plus satisfaisants et plus ambitieux ; on ne se contente pas de décrire, on cherche à expliquer

### **b. Critique des modèles optionnels par les empiristes**

- Est-il raisonnable de penser que les emprunteurs vont exercer au mieux leurs options ? La détermination du meilleur temps d'exercice est un problème très complexe faisant intervenir des concepts sophistiqués (calcul stochastique, EDP...), les emprunteurs ne peuvent pas le résoudre ex nihilo d'eux-mêmes.
- Les décisions d'exercice ne dépendent pas seulement de variables financières. Le niveau d'éducation, le chômage ou le divorce, l'attachement à un bien immobilier particulier, la perte de la qualité de crédit en cas de défaut (etc. ) sont des éléments influant sur ces choix.

### **c. modèles optionnels purs / modèles avec frictions et hétérogénéité**

Jusqu'au début des années 90 la modélisation théorique s'est faite grâce aux options en supposant des comportements optimaux pour les agents, les évaluations numériques restant relativement accessibles (résolution numérique d'EDP). Un débat s'est formé sur la manière dont était exercée l'option de défaut (cf. Vandell 1995), avec quel degré de « ruthlessness » (brutalité) ? Sont-elles actionnées en pratique dès qu'il est optimal de la faire ?

Les modèles purs expliquent une partie des exercices observés mais une autre part reste mal comprise, on parle d'exercice sous-optimal ou encore de non-exercice alors qu'optimalement le défaut est profitable.

La manière d'exercer les options va aussi dépendre du type de mortgage, on peut penser que dans le cas de l'immobilier commercial, l'emprunteur plus averti financièrement, exercera donc ses droits d'une manière plus franche (« ruthless »).

Il faut alors étudier plus en détails le comportement des agents et prendre en compte différentes imperfections :

- les coûts de transaction (financiers ou personnels)
- la solvabilité de l'emprunteur, l'attitude du prêteur
- l'hétérogénéité des coûts, des comportements, des propriétés
- les événements personnels (chômage, divorce, mutation professionnelle...)

Des tests statistiques ont validé les modèles frictionnels et rejetés les modèles purs (cependant ceux-ci restent le socle de la modélisation).

Depuis 1995 les articles cherchent à intégrer ces imperfections, l'idéal serait de pouvoir mener une analyse au niveau individuel des prêts. Mais le problème est alors l'accès aux données, la banque ayant un engagement de confidentialité vis-à-vis de ses clients.

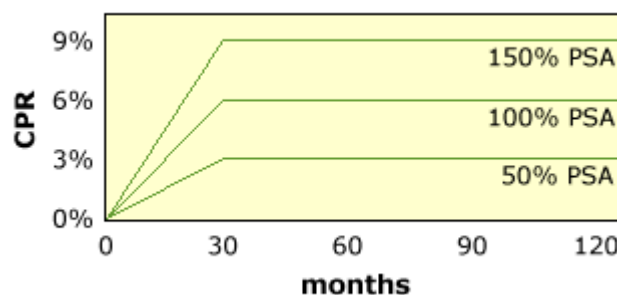
**d. modèles structurels ou optionnels / modèles sous forme réduite ou économétriques**

On retrouve cette distinction dans les modèles de risque de crédit, elle est évoquée dans l'article de Downing, Stanton, Wallace (2003).

Un modèle sous forme réduite se base sur une estimation économétrique des fonctions de défaut ou de RA, les variables principales sont l'âge, le taux d'intérêt et le prix du logement (on peut pousser le raffinement dans le choix des régresseurs assez loin).

Un exemple simple, la courbe PSA :

**PSA** **Illustrated**  
*Exhibit 1*



Le taux de RA est déterminé de manière exogène, uniquement en fonction de l'âge du prêt.

Une fois la forme spécifiée on calcule les différents coefficients. L'estimation se faisant sur données historiques, cette démarche permet de retrouver très correctement les taux de RA observés dans l'échantillon.

Cependant lorsque l'environnement change et que les variables d'états (taux et prix de l'immobilier) présentent une configuration inattendue on peut se demander si ces modèles descriptifs vont être également aptes à la prévision. Par exemple un modèle estimé sur une période de hausse des taux et de stabilité des prix immobiliers peut-il prévoir correctement les taux de RA dans une situation de baisse des taux et de baisse des prix immobiliers.

Une deuxième voie a été explorée, la piste optionnelle, elle essaye de donner un caractère plus endogène à ces décisions. On ne cherche plus à trouver la bonne fonction descriptive du RA mais plutôt à expliciter la stratégie d'exercice. Une fois celle-ci précisée les variables d'états peuvent changer et présenter de nouvelles configurations, la manière d'exercer les options ayant été précisée les taux de RA et de défaut s'y adapteront sans doute plus correctement.

On peut par exemple supposer que le RA est effectué si le gain du refinancement représente 20% de la valeur de marché du prêt. L'hypothèse peut être raffinée en introduisant une hétérogénéité des seuils de déclenchement parmi les agents.

Il semble cependant qu'une partie de l'exercice ne soit pas facilement modélisable de manière endogène (par exemple le taux de divorce, le taux de chômage) et que l'on soit amené à utiliser des modèles mixtes ou semi-structurels. La stratégie d'exercice est alors liée aux variables d'états mais il subsiste une partie aléatoire (à estimer économétriquement) qui impose de parler de probabilité d'exercice plutôt que d'exercice déterministe.

#### **e. Prêts à taux fixe et à taux variable : un test des modèles optionnels**

Les articles de Ambrose, Lacour (2001) et Calhoun, Deng (2002) sont un exemple de l'interaction entre l'approche théorique et l'approche empirique.

La théorie optionnelle des mortgages prévoit des différences dans les RA et les défauts des prêts à taux variable par rapport au cas basique des prêts à taux fixe. Le premier article, à l'aide d'une méthode économétrique parvient à mettre en évidence le phénomène annoncé, étayant ainsi la légitimité de cette modélisation.

Calhoun et Deng examinent la sensibilité aux incitations (RA et défaut) des emprunteurs à taux fixe par rapport aux emprunteurs à taux variables. L'étude est d'ordre économétrique et cherche à isoler l'impact de deux régresseurs particuliers sur les taux d'exercice. Ces deux régresseurs sont une mesure de la « moneyness » des options, c'est-à-dire du degré avec lequel les options sont dans la monnaie. Les estimations des coefficients liés à ces variables sont proches indiquant ainsi que la réactivité aux incitations est identique entre ces deux catégories d'emprunteurs. Cela ne signifie pas que les taux observés sont identiques mais que les incitations optionnelles opèrent de la même manière dans les deux populations, venant ainsi soutenir l'approche théorique.



## **II. Hétérogénéités et coûts d'exercice**

### **a. Motivation**

Entre 1993 et 1995 un thème a été développé dans la littérature sur les mortgages, l'hétérogénéité ; il est d'ailleurs plus exact de parler des hétérogénéités.

Les premiers modèles optionnels et les premières études économétriques (dans une moindre mesure) considéraient implicitement les emprunteurs comme étant tous identiques, réagissant uniformément aux situations et formant les mêmes anticipations. Cette simplification a permis de construire un socle théorique pertinent, puis elle fut peu à peu remise en cause. Ce paragraphe a pour but de présenter les principales pistes explorées pour gérer ce problème.

Dans un article important Vandell (1995) fait le point sur les connaissances accumulées et discute des approfondissements souhaitables. Parmi ceux-ci l'hétérogénéité est en bonne place.

Lors de l'exercice d'une option, l'emprunteur est confronté à des coûts objectifs (frais de dossier pour la constitution d'un nouveau prêt dans le cas d'un RA, déménagement dans le cas d'un défaut suivi d'une saisie ...) et subjectifs (temps consacré à la comparaison des différentes formules pour le refinancement, attachement sentimental à une maison ...). La liste de ces frais si l'on souhaitait la dresser serait longue et complexe. Un emprunteur refinancera (en général) son prêt si le gain dépasse ces coûts, ils interviennent donc de manière centrale dans la modélisation de l'exercice des options. Il est très probable qu'ils ne soient pas uniformes. Prenons l'exemple d'une personne possédant une certaine culture financière et d'une deuxième moins avertie. L'effort nécessaire à la première pour examiner l'option de RA sera moins important que pour la seconde, on peut alors s'attendre à une plus grande réactivité du particulier expérimenté aux incitations de RA (typiquement, une baisse de taux). Vandell propose dans son article de dresser une typologie de ces coûts prenant en compte leur variabilité entre emprunteurs.

Les disparités géographiques dans les évolutions des prix immobiliers sont une autre source d'hétérogénéité. Le LTV intervient de manière cruciale dans l'exercice des options or selon les secteurs le prix du bien servant de garantie au prêt peut varier fortement incitant à plus ou moins de défauts. Pavlov (2001) est un exemple de modélisation intégrant ces inégalités géographiques.

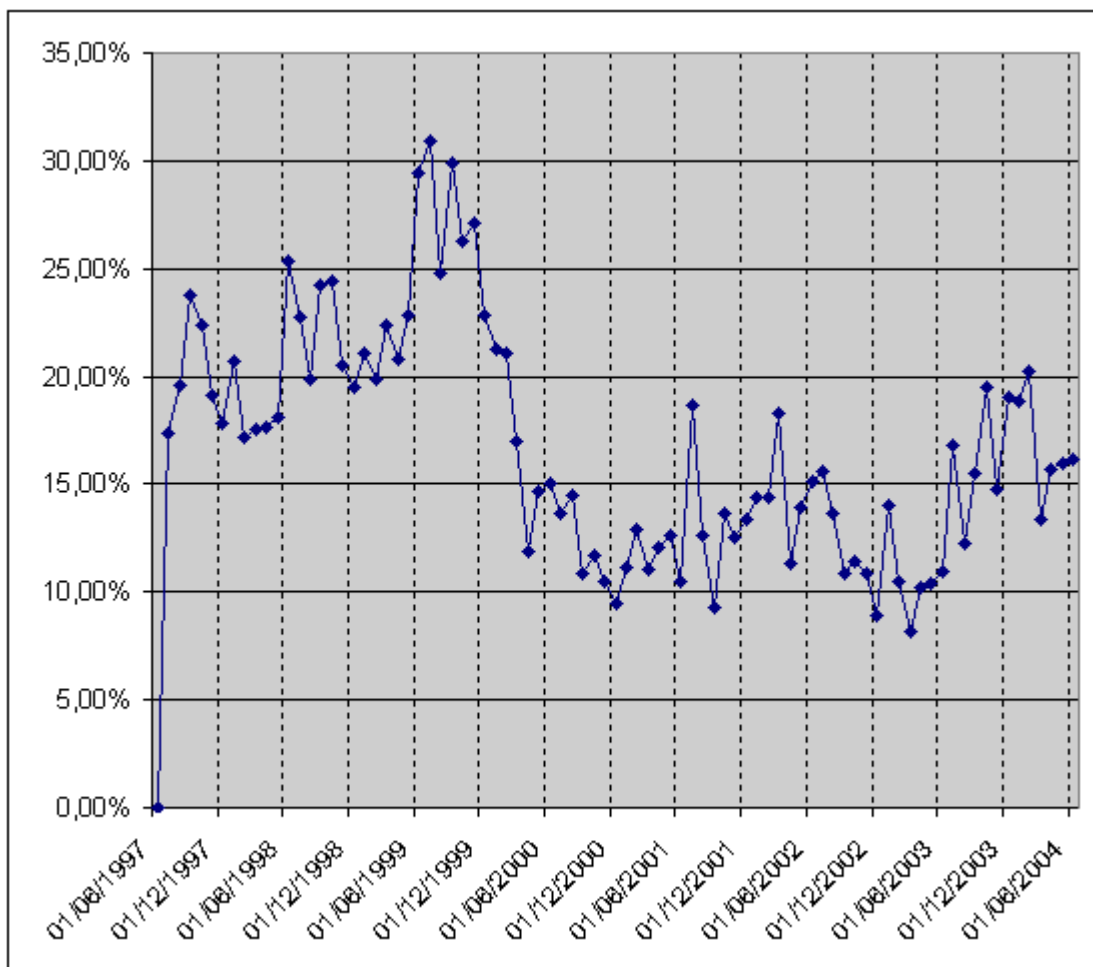
Au niveau d'un prêt ce problème peut se gérer en introduisant des dummies ou les bonnes constantes correctives, par contre sa gestion est plus compliquée au niveau d'un pool de prêts comme dans le cas des MBS, l'enjeu est cependant important. Stanton dans son article de 1996 modélise les coûts de transaction dans un lot par une distribution bêta. Avec le temps l'information augmente grâce à l'observation des RA effectués par les emprunteurs, la structure des coûts de transaction de ce pool particulier se révélant peu à peu. On peut alors choisir la modélisation la plus probable en choisissant les meilleurs paramètres pour la distribution bêta. La découverte de la spécificité de ces prêts amène à un meilleur pricing des MBS, la différence pouvant être substantielle (jusqu'à 6%).

L'hétérogénéité n'est pas complètement observable, il restera toujours une zone d'ombre car la connaissance parfaite des comportements des individus est chimérique. On peut cependant étudier une part significative, la part observable en introduisant les bonnes variables (niveau d'éducation, taux de chômage local, tendance locale du marché immobilier...).

**b. Preuve de la pertinence de l'hétérogénéité : la modélisation des courbes de RA et l'explication du phénomène de burnout**

La modélisation d'une courbe de taux de RA est un exercice complexe, le graphique ci-dessous présente une telle courbe pour le FCC Titrilog 06-97 constitué de prêts immobiliers gérés par Calyon (les taux sont annualisés).

( [http://www.titrisation.calyon.com/navig/0,2158,s6\\_11\\_d0\\_r586,00.html](http://www.titrisation.calyon.com/navig/0,2158,s6_11_d0_r586,00.html) )



Lors du mois de décembre 1997, les RA ont été effectués au taux annualisé de 18 %, soit un taux mensuel de 1,4% (1,4 % du capital restant du a été remboursé par anticipation lors de ce mois).

La principale variable expliquant le RA est le taux actuel sur des emprunts de même type. Les hypothèses d'homogénéité des emprunteurs et d'exercice optimal immédiat de l'option de RA ne permettent pas de reproduire une telle courbe. En effet, dès que le taux baisse, tous les emprunteurs devraient exercer leur droit et on obtiendrait un

taux de 100%. Il est plus probant de supposer que les individus sont confrontés à des coûts de transactions différents, et en conséquence leur taux critique de refinancement varie (voir par exemple Demey, Frachot, Riboulet (2000) pour une application de cette modélisation), on réussit à reproduire ainsi des courbes plus réalistes.

Cependant cette hypothèse à elle seule est insuffisante ; si le taux remonte elle implique un taux nul or ce n'est jamais le cas en pratique. Il existe un bruit de fond dans le RA, lié à des facteurs exogènes comme le chômage, le divorce et amenant un exercice sous-optimal de cette option. Néanmoins même lorsque le taux d'intérêt augmente on observe des RA motivés par un intérêt financier, dus à un phénomène de lag. De plus cette modélisation ne permet pas d'expliquer le phénomène de burnout.

#### Burnout :

On considère un pool de prêts avec les mêmes caractéristiques (de maturité, de taux, de nominal, d'amortissement ...). Si le taux baisse de 2%, remonte à son niveau d'origine puis rebaisse de 2% on observera lors de la deuxième baisse à nouveau des refinancements mais cependant en moins grande quantité que la première fois, c'est l'effet burnout (la partie droite de la courbe ci-dessus en présente un exemple, les RA semblent s'épuiser avec le temps). D'autre part, la variation de taux étant la même lors de la deuxième baisse, tous les emprunteurs auraient du exercer leur option la première fois, le taux de RA devrait être nul or en pratique ce n'est pas ce que l'on observe.

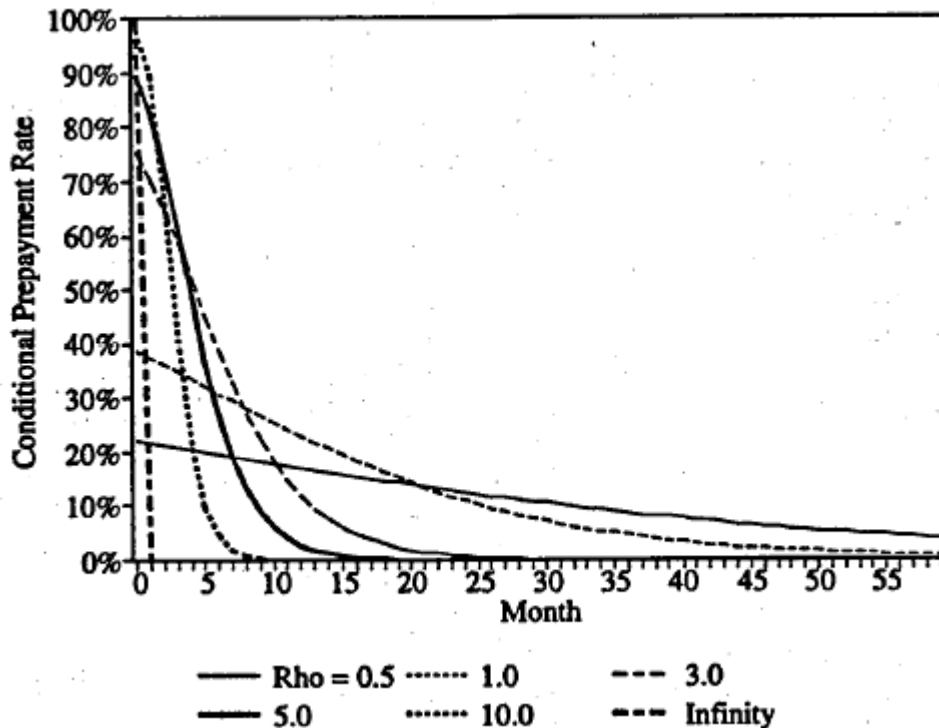
Stanton (1995) fournit une explication convaincante de ces phénomènes en introduisant en plus de l'hétérogénéité des coûts de transaction l'examen irrégulier du gain associé à une renégociation du prêt.

Les emprunteurs n'étudient pas en permanence leur option et le gain qu'ils pourraient tirer de l'exercice de celle-ci. Cette étude de leur position est faite à des moments aléatoires avec des fréquences variables selon les individus.

Pour illustrer les conséquences de cette idée on se place dans une situation simplifiée, les taux restent constants pendant 5 ans et à ce niveau il est optimal de refinancer pour 50% des personnes dans le pool (hétérogénéité des coûts de transaction). La figure ci-dessous présente alors l'évolution des taux de RA (annualisés) en faisant différentes hypothèses sur le rythme d'examen de l'option.

Les courbes les plus verticales sont celles associées à la fréquence la plus importante (le paramètre  $\rho$  mesure cette vitesse,  $\rho = 5$  signifie que le temps moyen pour l'examen de l'option est de  $1/5 = 0,2$  an = 2,4 mois ;  $\rho = 0,5$  donne un temps moyen de  $1/0,5 = 2$  ans). Cette modélisation est convaincante car elle reproduit le délai et l'étalement des RA que l'on observe en pratique ainsi que le phénomène d'épuisement du remboursement anticipé, le burnout.

Il est de plus probable que la vitesse d'examen de l'option soit également variable selon les emprunteurs



En résumé, la modélisation de ces courbes doit intégrer :

- les disparités des coûts de transaction
- l'examen aléatoire de l'exercice de l'option
- des différences dans la vitesse d'examen de l'option selon les individus

En incluant ces caractéristiques, Stanton réussit une modélisation convaincante, reprise par exemple par Kau, Slawson (2002) qui présentent un modèle permettant d'inclure cette dimension aux modèles optionnels classiques.

### c. Application : pricing des tranches de CMO

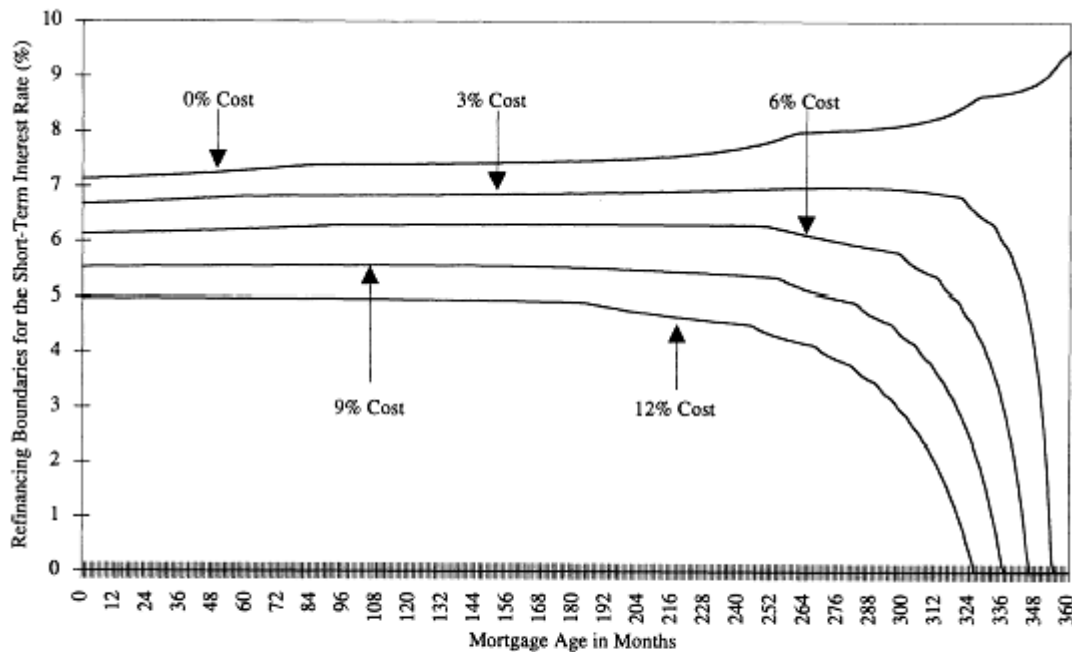
McConnell, Singh (1994) reprennent la méthodologie de Stanton en découpant le pool en cinq sous-populations avec des coûts de transaction différents (0%, 3%, 6%, 9%, 12% du capital restant du à la date du RA). Le graphique ci-après présente les seuils de taux où le refinancement intervient en fonction de l'âge et selon les sous-groupes de population.

En utilisant la méthodologie des modèles optionnels ils évaluent les tranches d'un CMO (collateralized mortgage obligation).

Cette structure comporte des parts A, B, C avec des taux fixes, mais des priorités différentes. Le principal de A est remboursé dans un premier temps, B et C ne reçoivent pendant cette période que les intérêts. Une fois A amorti, B commence à recevoir le principal alors que C continue à ne recevoir que les intérêts ; enfin C est remboursé avec ses intérêts. La quatrième part est la tranche Z ; pendant l'amortissement de A, B, C elle ne reçoit rien, mais les intérêts dus viennent augmenter son principal. Lorsque les tranches seniors sont amorties le remboursement s'effectue pour Z. Le risque augmentant avec le rang, les taux augmentent donc

également. Enfin une tranche IO (interest only) reçoit à chaque date de paiement des intérêts provenant des éventuels flux supplémentaires produit par le pool une fois les obligations des autres tranches complètement honorées pour ce mois.

Dans cet article les auteurs mettent en évidence l'impact des coûts de transaction sur la valeur des tranches. En modifiant un peu ceux-ci, la valeur des actifs varie significativement, mettant ainsi en évidence la nécessité d'une étude précise de ces frais.

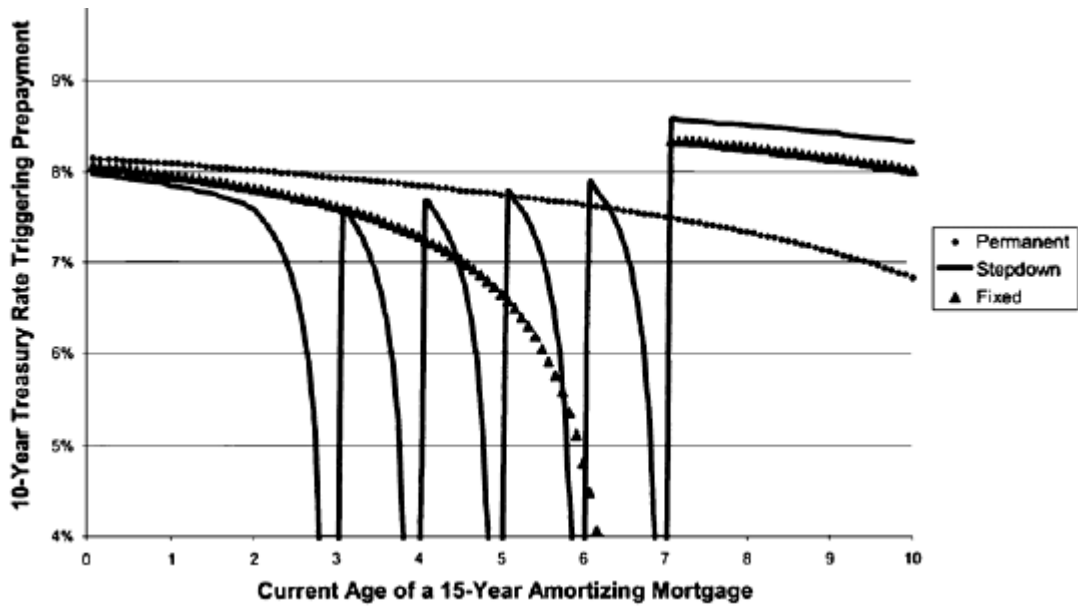


**Figure 1. Optimal refinancing boundaries I.** This figure displays the short-term interest rate boundaries with five different levels of refinancing costs for the optimal refinancing of 9.5 percent coupon, 30-year, fixed-rate mortgages. Refinancing costs as a percentage of the remaining principal balance for the five categories are (from the highest to the lowest boundary) 0, 3, 6, 9, and 12 percent respectively. The Cox, Ingersoll, and Ross model of the term structure is employed to determine the short-term interest rate boundaries. The parameters of the term-structure model are:  $\phi(t) = 0.02$ ;  $\sigma(t) = 0.05$ ;  $\alpha(t) = 0.2$ . These parameters imply an asymptotic long-term interest rate of 9.71 percent.

#### d. Hétérogénéité des pénalités de RA

Pour les prêts immobiliers résidentiels, le RA s'effectue la plupart du temps librement, sans pénalités (contexte américain). Pour les prêts commerciaux, il est en général admis que les indemnités à verser pour exercer cette option dissuadent les emprunteurs de l'actionner, ou bien rémunèrent complètement le prêteur en contrepartie. Or cette affirmation est relativement discutable. Kelly et Slawson (2001) introduisent les pénalités dans les modèles optionnels et obtiennent des résultats intéressants. En particulier, aucune d'elles n'est parfaitement efficace, le taux de RA diminue mais il ne devient jamais nul.

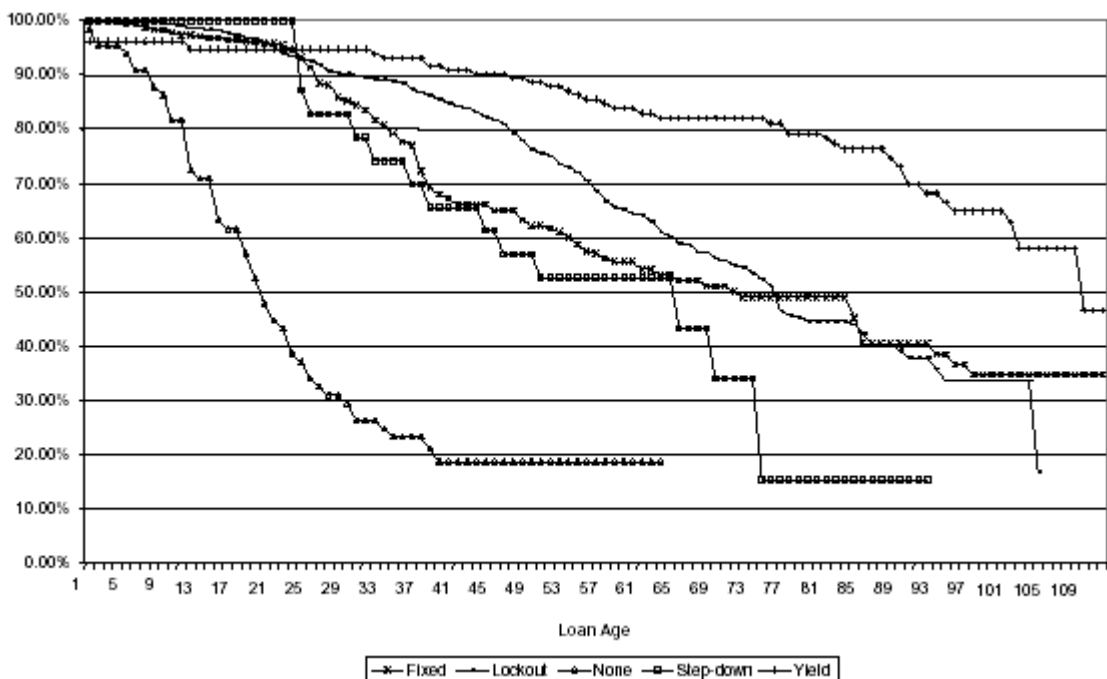
Le graphique suivant est un exemple de leurs résultats, il représente le taux critique déclenchant le refinancement en fonction de l'âge du prêt et selon le type d'indemnité.



- permanent : pénalité constante de 5% sur toute la durée de vie du prêt
- fixed : pénalité constante de 5% les sept premières années, puis de 1% pour la fin du prêt
- stepdown : pénalité dégressive, 5% les trois premières années, diminuant de 1% par an par la suite

La structure des RA est très différente selon les cas. Certains phénomènes sont remarquables ; dans le cas de la pénalité dégressive, le taux de RA chute brutalement dans les mois précédents la baisse de l'indemnité due (le taux de déclenchement devant être très bas). Il est plus profitable de retarder un peu l'exercice et d'attendre la prochaine baisse plutôt que d'agir immédiatement.

Fu, Lacour-Little, Vandell (2003) confirment l'importance des pénalités en étayant l'article évoqué ci-dessus par une étude économétrique.



Le graphique ci-dessus présente par exemple la probabilité de survie d'un prêt, estimée par une méthodologie de taux de hasard.

- Lockout : interdiction totale du RA pendant une période donnée
- Yield : la somme à payer dépend du taux le mois du refinancement, il s'agit de la méthode la plus efficace pour limiter les RA.

Ces deux articles mettent en évidence l'impact des indemnités lors de l'exercice de cette option, il faut pouvoir intégrer cette dimension sous peine de voir les modèles et les estimations économétriques présenter un biais systématique.

#### **e. Traduction géographique de l'hétérogénéité, problème des variables omises**

L'exercice plus ou moins optimal des options n'est pas dirigé par des variables uniquement financières, les influences peuvent être très nombreuses ; capturer correctement l'effet des principales est une tâche déjà complexe.

Lorsque l'on examine géographiquement les réactions aux incitations on constate des disparités, Pavlov (2001). Les explications de ce phénomène sont nombreuses : différence de tendance dans les prix immobiliers selon les secteurs, différence de revenus, de niveau d'éducation, de fiscalité, etc. Van Order, Zorn (2000) étudient par exemple l'effet des revenus et du voisinage sur l'option de défaut.

Cette influence géographique n'est sans doute que le résultat de l'effet d'autres variables. Ces dernières sont parfois très difficiles à modéliser, soit pour des raisons métriques (comment mesurer l'attachement à un bien immobilier particulier ?) soit en raison de difficultés d'accès aux données (niveau d'éducation, salaire...) ; on parle alors de variables omises.

Ces manifestations géographiques s'expliquent en observant la répartition des populations. Les personnes présentant des caractéristiques voisines ont une certaine tendance à se regrouper, en fonction du niveau de revenu, du niveau d'éducation, de l'origine ethnique, de la profession... L'idée développée par Pavlov dans son article consiste à intégrer indirectement ces variables en profitant du caractère observable de leur manifestation locale, il s'agit en fait d'une utilisation de proxy.

#### **f. Économétrie de l'hétérogénéité**

Les modèles empiriques ont également du intégrer cette dimension dans leur technique d'estimation. Cela s'est fait grâce à la méthodologie d'Heckman-Singer (1984), utilisée par exemple dans l'article de Deng, Quigley, Van Order (2000) ou dans celui de Huang, Ondrich (2002). Cette formalisation est très souvent utilisée dans les articles récents, ignorer ce phénomène de diversité conduit à des biais importants.

Lorsque l'on évoque le problème de l'hétérogénéité, il concerne d'abord les emprunteurs, cependant les prêteurs peuvent en être également à l'origine. L'étude d'un pool de prêts consentis par une banque donnée peut être influencée par la politique économique de cet organisme particulier. On peut par exemple imaginer un établissement plus agressif sur le segment des prêts immobiliers aux familles à revenus

modestes ; le risque de défaut sera probablement plus important que pour des familles de la classe moyenne. Dans un pool de prêts cette banque peut se trouver sur-représenter amenant ainsi une possibilité de biais, il s'agit encore ici d'un phénomène d'hétérogénéité. Ciochetti, Deng, Lee, Shilling, Yao (2003) développent une méthodologie permettant de neutraliser cet effet.

### III. Modélisation de H

H est une variable fondamentale dans le pricing des prêts mais elle agit aussi sur la valeur des MBS. Downing, Stanton, Wallace (2003) mettent en évidence l'impact de cette quantité sur l'évaluation de ces titres. Matthey, Wallace (2001) établissent quant à eux que les résidus des modèles basiques sont liés aux prix immobiliers (ils examinent le modèle optionnel de Stanton (1995) et une approche empirique avec les taux de hasard). L'inclusion de cette grandeur leur permet alors d'améliorer ces modèles. Ce paragraphe présente différentes pistes explorées dans la littérature pour décrire la dynamique des prix immobiliers.

#### a. Une modélisation discrète, non markovienne

Kariya, Ushiyama, Pliska (2002) utilisent la modélisation suivante pour les prix immobiliers :

$$P_n = P_{n-1} \exp(\mu_{n-1}h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_n^{(2)}),$$

$$\mu_{n-1} = \phi\mu_{n-2} + (1 - \phi) \log\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right),$$

$P_n$  : prix au mois n

h : intervalle entre deux évaluations

$\varepsilon_n$  : suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, centrées, réduites, représentant les innovations

La première équation peut se réécrire :

$$\mu_{n-1}h + \sigma h^{0.5} \varepsilon_n = \text{Ln} ( P_n / P_{n-1} ) = r_H(n)$$

Il s'agit simplement de la dynamique du rendement immobilier (rendement continu).

La deuxième équation se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \mu_{n-1} &= \Phi\mu_{n-2} + (1 - \Phi) r_H(n-1) \\ &= \Phi\mu_{n-2} + (1 - \Phi) * (\mu_{n-2}h + \sigma h^{0.5} \varepsilon_{n-1}) \\ &= \Phi\mu_{n-2} + (1 - \Phi) * (\mu_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) \quad (h, \sigma = 1 \text{ pour simplifier}) \\ &= \Phi\mu_{n-2} + (1 - \Phi)\varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$



Avec cette formulation, on voit apparaître une hypothèse importante, le drift à  $n-1$  est la moyenne ( $0 \leq \Phi \leq 1$ ) entre le drift précédant  $\mu_{n-2}$  et l'innovation ; le paramètre  $\Phi$  en mesurant l'importance relative.

Les Prix à la date  $n$  vont dépendre des prix aux dates précédentes, les trajectoires sont « path-dépendant » et donc non-markovienne. Ce choix exclut donc une description de  $H$  par un processus de diffusion. Cette représentation repose sur l'idée d'une certaine pérennité des tendances à la hausse ou à la baisse ; les prix immobiliers ne suivraient pas une marche aléatoire.

## **b. Comparaison des prix immobiliers à une action versant un dividende**

Il est usuel dans les modèles optionnels de modéliser  $H$  en utilisant la dynamique d'une action versant un dividende continûment.

On reprend ici les notations de Kelly, Slawson (2001) :

$$\frac{dRE}{RE} = (\alpha - cf)dt + \sigma_{RE}dz_{RE}$$

- $RE$  : le prix de l'actif
- $\sigma_{RE}$  : sa volatilité
- $dz_{RE}$  : mouvement brownien
- $cf$  : cash-flows versés continûment pour la détention du bien, équivalents aux dividendes d'une action
- $\alpha$  : rendement total de l'actif, équivalent au rendement total de l'action

En supprimant (pour l'interprétation uniquement) la partie aléatoire, cette formule se réécrit :

$$dRE/RE + cf dt = \alpha dt$$

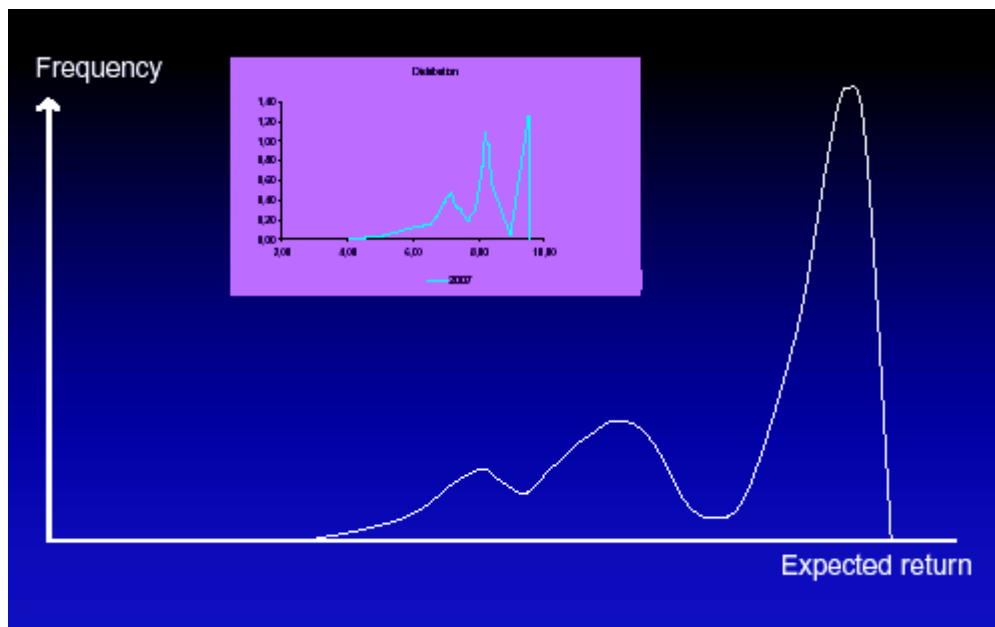
Le rendement total est la somme du rendement sur le prix ( $dRE/RE$ ) et des cash-flows produits. Pour l'immobilier résidentiel les cash flows représentent les loyers engendrés (location du bien) ou la consommation (le propriétaire en fait sa résidence principale) ; pour l'immobilier commercial ils représentent les flux dégagés par l'exploitation du bien).

En supposant  $\alpha$  et  $cf$  constants,  $RE$  suit un brownien géométrique. On se retrouve la situation standard de la théorie de l'arbitrage, cette dynamique est relativement simple et très bien connue.  $RE$  est une variable aléatoire log-normale et les rendements sont gaussiens.

Cette formulation s'est largement imposée dans les modèles théoriques. Elle amène cependant quelques remarques :

- un processus de diffusion est markovien, en raison de la présence du brownien (la variation du prix à venir ne dépend que de l'état présent et pas de la trajectoire suivie pour arriver à l'état actuel). Ainsi cette représentation s'oppose à celle introduite précédemment en temps discret.

- L'expression  $dRE/RE + cf dt = \alpha dt$  est également critiquable à plus d'un titre, Kau (1995). Elle dissocie le prix de l'actif des cash-flows produits par cet actif. La théorie financière invite plutôt à penser le prix du bien comme le résultat de l'actualisation des cash-flows futurs (forward-looking). D'autre part, il n'est pas réaliste de supposer le flux  $cf$  constant, il varie en fonction de la situation économique. La modélisation de RE semble de plus indissociable d'une modélisation simultanée de  $r$  (taux court)
- Enfin la distribution gaussienne des rentabilités introduite par ce choix est critiquable. Agossou-Voyème, Mokrane, Dupuy, Plas (2004) la remettent en cause dans le cas de l'immobilier de bureaux parisien. Le graphique suivant présente une distribution des rendements obtenue dans cet article, le caractère gaussien est contredit.



### c. L'immobilier, actif bruité

Le marché des biens immobiliers est très particulier, chaque actif étant unique par ses caractéristiques et surtout pas sa localisation. On ne peut pas déterminer strictement le prix d'un bien en utilisant une méthode comparative, celui-ci conserve ses spécificités. Le prix d'un immeuble est en fait le prix obtenu par sa vente effective, sans transaction on ne connaît exactement la valeur de cet actif.

D'un point de vue théorique, c'est une différence importante, on ne peut pas traiter un immeuble comme une action. Dans une certaine mesure cela amène à s'interroger sur la validité de la théorie de l'arbitrage appliquée à ce champ. Qu'en est-il de la notion de marché complet si importante pour une évaluation risque-neutre ? Est-il possible de synthétiser l'immeuble avec d'autres actifs ou bien, problématique quasi équivalente,

est-il possible de se couvrir parfaitement contre le risque immobilier ? Le marché de l'immobilier semble assez fondamentalement incomplet.

Childs, Ott, Riddiough dans une série d'articles (2001 – 2002 – 2002 – 2004) travaillent sur une modélisation bruitée de l'immobilier en s'inspirant de la méthodologie développée dans le livre de Liptser et Shirayev (1978).

Deux dynamiques sont utilisées, celle du vrai prix (inconnu)  $X(t)$  et celle d'un signal apportant des informations sur ce vrai prix  $Z(t)$ .

L'estimation de l'immeuble correspond à la quantité :

$$m(t) = E ( X(t) | I(t) )$$

où  $I(t)$  représente l'ensemble des informations disponibles à l'instant  $t$ , fournies entre autre par le signal  $Z(t)$ .

L'enjeu est alors de savoir comment se révèle l'information. L'estimation devient-elle plus précise avec le temps ou pas ? Différentes formes de bruit sont envisageables selon les situations.

Cette problématique est assez voisine de la théorie des options réelles, on ne connaît pas la valeur d'un projet tant que celui-ci n'a pas été réalisé, on dispose seulement d'une estimation de ses cash-flows. Childs, Ott, Riddiough développent dans leurs articles les conséquences de cette réflexion pour le pricing d'option sur actifs bruités.

#### **d. Estimation du LTV(t) et DCR(t), quantités dérivées de H**

Dans l'immobilier commercial, ces deux quantités sont très liées à l'exercice des options de défaut et de RA.

Loan-to-value :

$LTV(t) = L(t) / V(t)$  : c'est le rapport entre la valeur de marché des paiements restant dus à  $t$  et la valeur de la propriété à cette même date ; pour l'immobilier commercial c'est une mesure du levier.

$LTV(t) > 1$  signifie que le prêt coûte plus cher que le bien financé, le risque de défaut est important dans ce cas (situation de « negative equity »)

debt service coverage ratio :

$DCR(t) = NOI(t) / PMT(t)$  : rapport entre le NOI(t) (net operating income, montant dégagé par l'exploitation disponible pour la dette) et les mensualités associées à cette dette. Il s'agit ici exclusivement d'immobilier commercial.

$DCR(t) < 1$  signifie que la structure assurera difficilement ses obligations bancaires, le défaut devient probable (situation de « negative cash flows »)

Ces deux ratios sont connus au début du prêt et sont des indicateurs importants pour la mesure des risques. Par la suite ils vont évoluer avec la situation économique et la situation personnelle de l'emprunteur.

Leur connaissance à la date  $t$  est importante pour la modélisation, il s'agit d'indicateurs efficaces. Il est alors nécessaire d'estimer ces grandeurs, l'observation directe étant impossible pour la banque (dans le cas du LTV, il faut une vente pour connaître sa valeur exacte ; pour le DCR il faut connaître les résultats d'exploitation de l'entreprise). On va donc chercher à construire des proxys.

Goldberg, Capone (1998) utilisent par exemple les relations suivantes :

$$DCR(t) = DCR(0) * RPI(t) * ( 1 - 2.15 * ( VAC(t) - VAC (0) ) )$$

$$LTV(t) = L(t) / ( CAP(t) * NOI (t) )$$

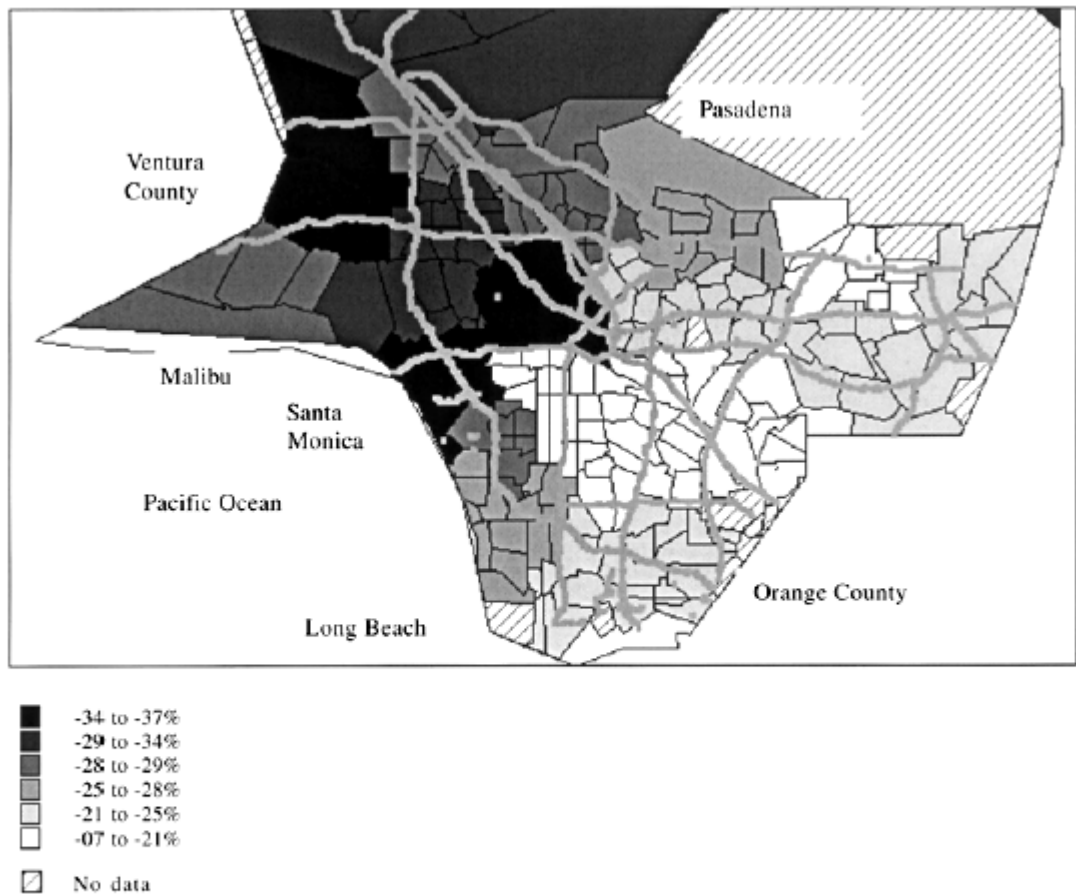
où :

- RPI(t) : « rental price indices », indice d'évolution du prix des loyers
- VAC(t) – VAC (0) : variation d'un indice mesurant le taux de vacance moyen
- CAP(t) : taux d'actualisation prenant en compte le risque d'exploitation en intégrant une prime de risque.
- 2,15 : constante associée à un niveau d'équilibre de long terme de ces grandeurs

Il s'agit d'estimation, on applique des quantités dérivées d'indices à des propriétés particulières. Le but n'est pas d'obtenir les vraies valeurs mais de construire des variables représentatives de l'évolution de ces grandeurs. Il n'y a donc pas unicité dans le choix des proxys et on peut essayer de les raffiner.

Pavlov (2001) estime par exemple le LTV en intégrant une dimension géographique. La valeur de la propriété intervient au dénominateur et son évolution n'est pas spatialement uniforme (cf. graphique).

La base de données de cet article détaille les caractéristiques des emprunts, en particulier elle précise la localisation de la propriété sous-jacente. Il est donc possible de recouper ces données avec des indices immobiliers sectoriels et d'obtenir ainsi un meilleur proxy pour le LTV.



*Figure 2.* Spatial distribution of the total decline in property values from 1990 to 1995, Los Angeles County. The decline in property values was not uniform in space. The largest total declines (34 to 37 percent of value) were in the high-priced areas of the county, including Bel Air, Beverly Hills, Pacific Palisades, and some Beach Cities. The lines represent major freeways in the area.

**PARTIE 4 :**

**PRETS IMMOBILIERS**

**COMMERCIAUX**

## **I. Introduction**

Il n'est pas possible d'appliquer directement les résultats obtenus sur les prêts résidentiels aux prêts contractés par des structures commerciales, il est nécessaire de mener une étude spécifique à ces contrats.

En effet :

- on peut avoir accès à des mesures de cash-flows dégagés par la structure (le NOI : net operating income) alors que dans le cas d'un particulier la connaissance de ses revenus est difficile à obtenir pour des raisons de confidentialité.
- la réaction à des conditions économiques sera probablement plus optimale financièrement que pour un emprunteur individuel. On peut par exemple penser que le défaut sous-optimal sera moins fréquent, les propriétaires du bien commercial étant probablement plus avertis de leurs intérêts financiers (on parlera d'un exercice de l'option plus impitoyable, « ruthless »)
- il existe souvent des pénalités de RA pour ce type de contrat, entravant (à défaut d'empêcher complètement) l'exercice de cette option. Le risque principal est surtout un risque de défaut alors que dans le cas résidentiel le RA est la première source d'incertitude.

La littérature s'est d'abord portée sur l'évaluation du risque de défaut (jusqu'à une époque récente on considérait le RA comme négligeable en raison des pénalités). Un des premiers articles, Vandell (1984), étudie l'analyse par ratios utilisée pour maîtriser les risques encourus par le prêteur. Les deux quantités fondamentales sont le LTV et le DCR.

Selon les articles on examine ces grandeurs dans une perspective statique ou dans une perspective dynamique.

Dans le premier cas, le problème est la gestion des risques pour le prêteur à l'aide de  $LTV(0)$  et  $DCR(0)$ , et éventuellement d'une estimation des cash-flows futurs. La question est de savoir ici dans quelle mesure ces deux ratios originels sont des indicateurs pour le risque de défaut ( $DCR(0) = 1.1$  est plus risqué, à priori que  $DCR(0) = 1.5$ ).

L'approche dynamique cherche à reconstruire les ratios à la date  $t$ . A partir de leur valeur à  $t = 0$ , pour ce bien spécifique, et de leur évolution probable en utilisant des indices de prix immobiliers (mise à jour du LTV) et par exemple des indices des taux de vacances pour les structures locatives (mise à jour du DCR). Le but est d'essayer de détecter les phénomènes déclenchant le défaut pour pouvoir le gérer.

Dans son article de 1984, Vandell critique l'utilisation trop simpliste des ratios qui était faite à l'époque. Leur connaissance à  $t = 0$  ne donne qu'un aperçu des risques pris, il est nécessaire de développer des études économétriques plus dynamiques.

## II. Modèles optionnels

L'article de référence est celui de Titman, Torous (1989), à deux variables d'états :

$$dr = K(\mu - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dZ_r,$$

$$dB = (\alpha - b)Bdt + \sigma_B B dZ_B,$$

r représente le taux court, et B la valeur du bien immobilier, il s'agit de la modélisation classique déjà évoquée auparavant.

La difficulté va porter sur l'estimation de b, le flux dégagé par la structure. Dans ce modèle il est supposé constant (ainsi que  $\alpha$ , le rendement total) et son calibrage est un peu délicat. Cette hypothèse économique est très discutable, il n'est pas très réaliste de supposer les cash flows constants quelque soit le contexte économique.

Dans leurs conclusions Titman et Torous évoquent ce problème,  $\alpha$  et b sont en pratique des quantités volatiles. On peut par exemple essayer de modéliser la dépendance du taux court et des cash flows dégagés. Lors d'une période de ralentissement économique les cash flows faibles sont en général liés à des taux faibles initiés par la banque centrale pour essayer de faire repartir l'économie.

Pour l'immobilier résidentiel l'hypothèse de constance de  $\alpha$  et b est sans doute plus acceptable mais dans le cas d'une propriété commerciale la plus grande sensibilité aux conditions économiques devrait apparaître dans la modélisation.

## III. Modèles économétriques

Ciochetti et al. (2002) reprennent la méthodologie des taux de hasard adaptée aux problématiques de risques concurrents et d'hétérogénéité développée par Deng (2000). On retrouve les régresseurs classiques (par exemple ceux mesurant le degré avec lequel les options sont dans la monnaie) et d'autres plus spécifiques, liés à une plus grande sophistication financière de l'emprunteur. Ainsi la solvabilité, la capacité à négocier et la notation de la qualité de crédit de l'emprunteur influent sur les exercices des options. La notation de la qualité de l'emprunteur peut-être implicite (évaluation du banquier) ou explicite (score FICO aux Etats-Unis), elle dépend des antécédents bancaires et de l'aptitude dont a fait preuve la personne ou la société pour le remboursement de ses emprunts antérieurs.

## IV. Biais et endogénéité des ratios

### a. Ratios d'origine

On peut illustrer la difficulté d'une utilisation irréfléchie des ratios avec l'article de Archer, Elmer, Harrison, Ling (2002). Le LTV(0) est en général considéré comme un indicateur du risque supporté par le prêteur or cette quantité est endogène au processus de prêt. Le banquier se forme une idée ex-ante du risque associé au projet et va essayer de le contrôler en agissant sur les caractéristiques du prêt (montant, taux, garanties,...)



voir même sur les caractéristiques du bien financé en modérant éventuellement les ambitions de l'emprunteur.

Au final un risque perçu important amène le banquier à imposer un LTV(0) plus faible et un risque plus mesuré peut l'amener à accepter un LTV(0) plus conséquent. Le caractère prédictif du LTV(0) est donc très perturbé par le processus d'élaboration du prêt. Dans cet article, les auteurs vérifient ce phénomène, ils ne trouvent pas de relation statistiquement significative entre cette grandeur et la fréquence des défauts (ce qui n'exclut pas un lien éventuel entre LTV(0) et la taille de la perte en cas de défaut).

L'élaboration du contrat ne supprime pas complètement le caractère prédictif des grandeurs observables à  $t = 0$  ; le DCR(0) et les caractéristiques du bien (localisation, année de construction, taille du bien...) fournissent une mesure de ces risques. De manière plus étonnante, les changements dans l'économie locale ne semblent pas influencer beaucoup sur l'incidence du défaut.

Ambrose et Sanders (2001) contredisent ce dernier résultat en établissant que les risques de défaut et de RA sont bien influencés par le contexte économique et notamment par les anticipations de taux. Dans cet article ils confirment également que le LTV(0) n'a pas d'impact statistiquement significatif sur le taux de défaut.

Par contre cette quantité agit sur le RA, les emprunteurs avec un LTV(0) élevé sont plus susceptibles d'effectuer un RA.

La localisation du bien impacte aussi sur le risque de remboursement anticipé (problème des variables omises, la situation géographique est un proxy pour des variables plus fondamentales qui ne sont pas prises en compte dans le modèle).

#### **b. Biais d'un pool**

Lors de l'étude des terminaisons anticipées un autre biais peut intervenir. Le pool de prêts, s'il provient d'un seul organisme, peut présenter un biais systématique lié à la politique ou au secteur d'activité de la banque. Le Crédit Agricole (Calyon aujourd'hui) et Dexia ne se tournent pas vers les mêmes clientèles, un prêt immobilier pour un agriculteur et un prêt pour une collectivité locale ne présentent pas les mêmes risques.

Dans l'étude d'un pool, il peut arriver qu'un organisme soit surreprésenté ou sous représenté, amenant ainsi un biais dans l'estimation. Ciochetti, Deng, Lee, Shilling, Yao (2003) développent une méthodologie permettant, à partir d'un pool non représentatif de l'ensemble des prêts commerciaux, de modifier les estimateurs afin d'obtenir des résultats plus généraux.

Le but peut être également d'étudier ce pool particulier et dans ce cas cette méthodologie n'a pas d'intérêt, elle n'est utile que si l'on souhaite tirer des conclusions générales à partir d'un ensemble de titres imparfaitement représentatifs.

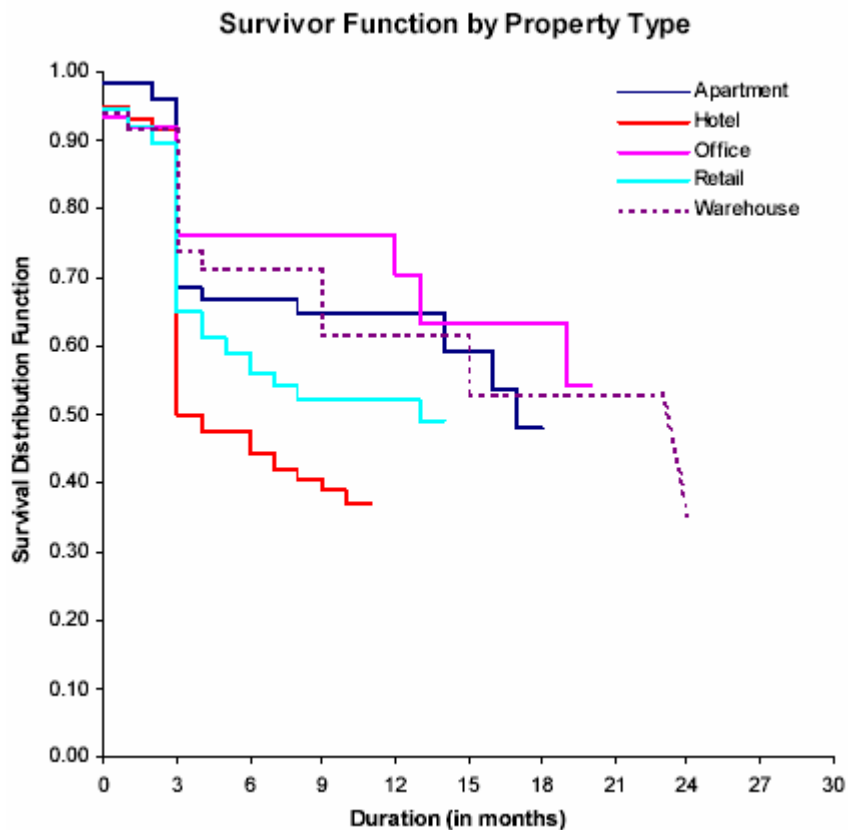
### **V. Exercice du RA**

Dans les prêts commerciaux, les pénalités en cas de remboursement anticipé n'empêchent qu'en partie cet exercice. La banque supporte dans tous les cas un risque, quelque soit le type de pénalités appliquées ; l'efficacité peut cependant varier selon la nature de celles-ci. Kelly, Slawson (2001) et Fu, Lacour-Little, Vandell (2003) sont les articles de référence pour ce sujet.

## VI. Exercice du défaut

### a. Impact du type de structure

Selon les types de propriétés commerciales il peut être plus ou moins aigu. Le graphique ci-dessous (Chen, Deng 2003) donne les probabilités de survie par type de structure lors d'un ralentissement économique ; la catégorie des hôtels a été la plus touchée.



### b. Les phases du défaut

Ce n'est pas un processus binaire et immédiat, il présente plusieurs phases allant du non-paiement d'une échéance à la saisie et la vente du bien garantissant le prêt. Chen, Deng (2003) illustrent ce mécanisme ainsi :

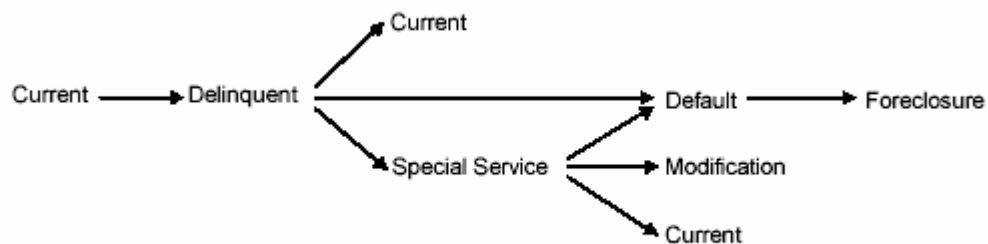


Figure 1. The Default Process

- Current : marche normale du prêt
- Delinquent : non-paiement d'une échéance
- Default : en général défini comme le non-paiement de trois échéances
- Special Service : organisme chargé de gérer les prêts « delinquent »
- Modification : de nouvelles modalités de prêt sont mises en place pour permettre à l'emprunteur de continuer son activité
- Foreclosure : saisie et vente du bien

### c. Asymétrie du défaut

Le prêteur et l'emprunteur sont dans des situations différentes et leurs décisions sont basées sur des variables différentes.

Lorsque le prêt devient déficient, la banque fonde sa décision principalement sur l'examen du NOI à venir (ou du DCR). La saisie et la vente du bien ne permettent pas en général au prêteur de récupérer les sommes dues, le bien commercial est probablement dans une situation d'exploitation difficile. D'autre part cette démarche entraîne des frais de procédure conséquents. La perspective d'une amélioration de la situation économique permettant au propriétaire de revenir à une situation plus stable est aussi dans l'intérêt de la banque.

L'emprunteur fonde plutôt sa décision sur l'examen du LTV(t) au moment de la déficience, il compare la valeur de son bien et la valeur de marché de ses engagements financiers. Une situation de « negative equity » ( $LTV > 1$ , le prêt coûte plus cher que le bien) entraîne une probabilité de défaut significative. Dans une moindre mesure, de bonnes perspectives économiques (NOI anticipé, taux de vacance anticipé) influent sur la décision de défaut en diminuant la probabilité. Cependant l'examen du LTV(t) reste le premier facteur pour l'exercice du défaut.

## VII. Exemple : les prêts multifamily

Un investisseur souhaite construire ou acheter un ensemble de logements pour les louer par la suite à plusieurs familles, les loyers ainsi récoltés servant à rembourser le prêt.

Huang et Ondrich (2002) étudient l'exercice des options pour ce type de projet en utilisant un modèle économétrique d'estimation des taux de hasard et en intégrant la problématique des risques concurrents. Ils étudient notamment l'effet de la variation des prix immobiliers, des taux de vacance et des loyers sur les décisions d'exercice (la liste des régresseurs n'est pas exhaustive). On ne peut pas étendre directement les résultats obtenus sur les prêts immobiliers consentis à un particulier afin qu'il finance son habitation à ce type de structure plus complexe ; une étude spécifique s'impose.

Cet article intègre également la politique du logement (américaine) par l'intermédiaire de la « section 8 ». Cette disposition permet aux propriétaires de recevoir un supplément sur le loyer pour les populations et les logements que le gouvernement souhaite aider.

On observe alors un moindre exercice des options, assurant ainsi une plus grande stabilité pour les habitations concernées. Lors de l'examen de l'option de défaut, l'investisseur intègre dans son raisonnement la perte de cette subvention. Ainsi un prêt où il devient optimal d'exercer le put peut se poursuivre si la « section 8 » renforce suffisamment les cash flows pour le promoteur, cet impact pouvant être très significatif

Une autre dimension administrative à prendre en compte concerne les effets de la fiscalité. Goldberg et Capone (1998) étudient les raisons qui ont amené à un taux de défaut important sur les prêts multifamily au début des années 90 (0,14% en 1986, 3,05% en 1993). Parmi d'autres facteurs, ils pointent l'effet d'une modification importante de la fiscalité et construisent un régresseur qu'ils intègrent ensuite dans l'estimation de la probabilité de défaut. Son impact est significatif et si les taux d'intérêts n'avaient pas baissé simultanément, les défauts auraient pu être beaucoup plus importants.

Dans cet article ainsi que dans celui de 2002, Goldberg et Capone développent également une théorie du double déclenchement (double-trigger model) pour le défaut dans le cas des prêts multifamily. Ils testent plusieurs régresseurs et leur significativité par rapport à l'exercice du put. Ces variables correspondent à trois cas :

- $LTV > 1$  : le prêt coûte plus cher que le bien financé
- $DCR < 1$  : les loyers ne couvrent pas les remboursements de la dette
- $LTV > 1$  et  $DCR < 1$  : les deux conditions sont réalisées de manière simultanée, double déclenchement

Le troisième cas explique le défaut de la manière la plus significative, l'exercice de cette option est associé à une situation de « negative equity » et simultanément de « negative cash-flows ».

**PARTIE 5 :**

**AUTRES AXES DE**  
**REFLEXION**

## **I. Débats récents sur le déclenchement du défaut ou du RA (résidentiel et commercial)**

### **a. Défaut commercial**

Goldberg et Capone (2002) présentent une réflexion intéressante sur le défaut dans le cas de l'immobilier commercial.

Pour eux, l'exercice de cette option ne dépend pas uniquement d'une situation de « negative equity » (  $LTV(t) > 1$  ) mais aussi des cash flows futurs. Lorsque que  $LTV(t)$  est supérieur à 1 le prêt coûte plus cher que le bien financé, cependant on ne peut pas se limiter à cette caractéristique car la situation financière de l'emprunteur est effectivement déterminée par la valeur du bien immobilier mais aussi par les cash flows futurs liés à l'exploitation de la structure.

Les auteurs affirment que le degré de « negative equity » n'est pas important, la décision repose uniquement sur les profits à venir. En effet, si l'emprunteur exerce le put il échangera sa propriété contre le prêt et quelque soit la valeur immobilière de cet actif il recevra le même strike.

Quatre modélisations du défaut sont testées, elles correspondent à différents choix pour le régresseur lié au défaut :

- Proba (  $LTV(t) > 1$  ) : défaut déclenché par une situation de « negative equity »
- Proba (  $DCR(t) < 1$  ) : défaut déclenché par une situation de « negative cash-flow »
- Proba (  $LTV(t) > 1$  et  $DCR(t) < 1$  ) : défaut déclenché par la conjonction de ces deux événements
- Espérances de  $LTV(t)$  et  $DCR(t)$  : les regresseurs sont des valeurs moyennes

Les deux premiers modèles ont un pouvoir explicatif plus faible par rapport au troisième et au quatrième modèle. Ce dernier donne des résultats équivalents au troisième dans les situations moyennes mais fait preuve d'une trop grande variabilité dans des circonstances un peu exceptionnelles.

Ainsi Proba (  $LTV(t) > 1$  et  $DCR(t) < 1$  ) semble être la spécification la plus efficace pour expliquer ce phénomène du défaut, justifiant l'appellation de « double trigger model » proposée par les auteurs; le défaut étant lié à deux événements. L'étude de Ciochetti et al. (2002) semble corroborer cette hypothèse.

### **b. Défaut résidentiel**

Pour l'immobilier résidentiel, le débat se pose en des termes un peu différents. Il oppose une théorie affirmant que le défaut est essentiellement lié à une situation de « negative equity » à une thèse affirmant qu'il est la conséquence d'événements déclencheurs (trigger events) comme le chômage ou le divorce.

Lacour et Malpezzi (2003) étudient les mortgages émis en Alaska dans un marché immobilier et un contexte économique très volatils.

Le résultat de leur recherche plaide plutôt en faveur de la première thèse mais ils reconnaissent dans le même temps la pertinence des événements déclencheurs. On pourrait également envisager une troisième version où le défaut est la conséquence d'un événement personnel dans une situation de « negative equity », les deux conditions étant nécessaires à l'exercice du put.

### **c. Impact de la notation de crédit, des garanties, de la capacité à négocier**

Il s'est développé récemment, à l'image des agences financières comme Moody's qui notent la capacité des grandes entreprises à honorer leurs obligations, des systèmes de mesure de la qualité de crédit des particuliers. On peut par exemple évoquer le système FICO ([www.myfico.com](http://www.myfico.com)) en place aux Etats-Unis. Ce score est devenu un élément d'analyse pour la banque lorsqu'elle accorde un prêt.

Peristiani et al. (1997) en souligne l'effet dans l'exercice du RA. Un emprunteur n'actionnera son option que si sa notation lui permet une renégociation efficace, son score conditionne l'opportunité d'un refinancement en cas de baisse des taux.

D'autre part on peut aussi observer un phénomène de « credit-curing » amenant à des RA spécifiques. Certains emprunteurs peuvent avoir emprunté alors que leur notation de crédit était mauvaise. S'ils ne font pas défaut leur score va probablement s'améliorer peu à peu, leur permettant ainsi de renégocier leur prêt à des taux plus avantageux grâce à leur nouvelle notation.

Ce système peut aussi avoir un impact sur le défaut. Son exercice va dégrader le FICO, cette baisse représente un coût pour l'emprunteur ; il lui sera plus difficile d'emprunter à l'avenir, les taux exigés par la banque risquant d'être plus élevés. Dans le cas de l'immobilier commercial cette perte de réputation peut-être particulièrement dommageable pour l'individu, elle peut l'empêcher de financer de nouveaux projets professionnels.

La garantie du prêt est essentiellement constituée par le bien lui-même. La fluctuation de sa valeur impactera l'exercice des options.

L'exemple de la situation de « negative equity » a été évoqué précédemment, elle concerne le défaut.

On peut aussi analyser l'effet de cette fluctuation sur les RA. Un refinancement peut devenir difficile si la valeur du bien baisse fortement, la banque pouvant considérer les garanties apportées comme insuffisantes. Dans le cas d'une plus-value sur l'actif, on peut voir apparaître des RA de « cashout » destinés à augmenter le niveau de consommation.

Enfin, la capacité à négocier peut influencer sur les décisions de l'emprunteur dans le cas de l'immobilier commercial. S'il peut convaincre de la viabilité de son projet et de sa capacité de gestionnaire, la banque pourra accepter des renégociations de prêts avec un niveau de garantie plus faible.

## II. Cas européens et français

### a. France

Pour la France le sujet du RA est en général traité au niveau de la banque si celle-ci conserve les prêts dans son bilan. Quelle est la perte potentielle en cas de baisse des taux et de refinancements massifs (comme cela s'est déjà produit par le passé) pour l'organisme financier ? Comment alors facturer cette option aux clients ? Quelque soit la méthode employée il semble qu'elle laisse toujours un risque de RA dans le portefeuille de la banque.

La littérature est moins abondante que dans le cas anglo-saxon, on peut citer les articles de Demey, Frachot, Riboulet (2000) et de Elie, Frachot, Georges, Neuvial (2002) publiés par le GRO (groupement de recherche opérationnelle de l'ancien crédit lyonnais). Le but de cette recherche est la gestion actif-passif bancaire et la modélisation de l'écoulement des postes du bilan. Elle vise à éviter des impasses de liquidité et à gérer le risque de taux.

Pour illustrer cette problématique, on peut par exemple envisager un cas de baisse des taux inattendue. Les RA vont devenir importants, la banque se retrouve alors avec une somme d'argent conséquente dans un contexte de taux bas. De plus les flux futurs s'en trouvent réduits, les projets d'investissements envisagés pour l'avenir sont donc à réexaminer.

Le livre de Demey, Frachot, Riboulet, Introduction à la gestion actif-passif bancaire, développe cette réflexion.

### b. Etats-Unis et Grande-Bretagne

Les modèles classiques sont construits essentiellement sur des mortgages américains avec leurs caractéristiques propres. Les résultats ne sont pas applicables directement à d'autres contextes nationaux car certains phénomènes sont assez spécifiques.

On peut par exemple citer les RA qualifiés de « cashout » qui se produisent aux Etats-Unis. Le nouveau prêt dépasse le montant restant du sur le bien immobilier, la différence étant destinée à être consommée.

Les pénalités de RA peuvent également fortement varier d'un pays à l'autre. La nature et le mécanisme des prêts sont aussi sujets à des différences, dans une partie précédente les mortgages anglais et leurs particularités ont déjà été évoqués.

### c. Pays-Bas

Charlier, Van Bussel (2003) présentent le cas hollandais et ses prêts immobiliers. L'impact de la fiscalité est très marqué et explique les mécanismes mis en place. Dans ce pays les intérêts sont déductibles or un prêt à taux fixe et à mensualités constantes voit sa charge d'intérêt diminuer régulièrement réduisant ainsi le gain fiscal pour l'emprunteur. L'idée centrale est alors de constituer sur un compte rémunéré une somme d'argent destinée à rembourser in-fine le principal du prêt. Chaque mois, l'emprunteur paye les intérêts sur le montant emprunté, sans commencer à le rembourser, et il construit en même temps par des versements sur un compte la somme nécessaire pour pouvoir s'acquitter de ses obligations à la date de maturité. Sa charge



d'intérêt reste constante, lui permettant de bénéficier au maximum de la réglementation fiscale.

On distingue plusieurs types de prêt en fonction du mode de rémunération du compte :

- life insurance mortgage : la rémunération dépend de la rentabilité de la compagnie d'assurance. L'emprunteur est soumis à un risque à l'échéance, le montant peut être insuffisant pour rembourser la totalité du principal ou au contraire dépasser celui-ci.
- savings mortgage : le compte est un compte d'épargne construit pour éliminer tout risque à l'échéance
- interest-only mortgage : l'emprunteur paye seulement les intérêts. A la date de maturité il peut effectuer un nouvel emprunt, ou bien vendre l'immeuble et rembourser le nominal avec le produit de la cession, ou encore rembourser avec ses propres fonds. Le risque de crédit est plus élevé pour la banque dans ce type de contrat
- investment mortgage : la rémunération du compte dépend des décisions de l'emprunteur, il choisit les actions sur lesquelles il souhaite investir
- switch mortgage : la permutation est possible en cours de contrat entre un investissement action et un compte d'épargne

### **III. Politique du logement et enjeux sociaux**

L'immobilier n'est pas un investissement pur, il comporte également un aspect consommation. L'achat d'un bien est un enjeu important pour une famille ou pour un individu ne serait-ce que par l'ordre de grandeur des dépenses engagées ; en général on ne s'endette pour une telle somme et pour une telle durée qu'une fois dans sa vie. Les aspects humains, budgétaires et sociaux amènent naturellement à une réflexion sur la politique du logement d'un état. On s'intéressera ici seulement à l'accès à la propriété.

#### **a. Efficacité des MBS**

Les agences hypothécaires comme Fannie Mae ont pour but, direct ou indirect, de réduire le coût des emprunts individuels en utilisant le mécanisme de la titrisation. Un pool de prêts est globalement moins risqué que la somme de ses composantes (mécanisme de la diversification du risque spécifique). Les investisseurs achetant les parts de MBS émises par ces agences vont donc accepter un rendement plus faible sur ces titres en raison de leur risque plus réduit. Ce taux va ensuite se transmettre aux prêts individuels amenant ainsi une réduction du coût de l'emprunt. Dunn et McConnell (1980) ont vérifié que ce mécanisme fonctionnait correctement et ont établi que les emprunteurs individuels qui utilisaient les marchés financiers indirectement par le biais de la titrisation le faisaient au juste prix. Le rendement total exigé sur les parts de MBS est le même que celui du marché (pour ce niveau de risque), les particuliers ne participent donc pas à leurs désavantages aux marchés de capitaux.

## **b. Emprunteurs prime et nonprime**

Le taux est la variable fondamentale dans le coût d'un prêt, il est censé refléter exactement le risque pris par l'emprunteur, en l'occurrence pour les mortgages : risque de RA et de défaut.

L'exercice des options n'étant pas purement financier, on peut faire l'hypothèse que la sensibilité aux incitations varie selon les individus. Par exemple des emprunteurs moins sophistiqués pourraient prendre plus de temps pour réagir à des taux plus bas, voir ne pas réagir du tout. Dans une telle situation le risque supporté par la banque serait plus faible et il devrait donc amener à réduire le taux par rapport aux emprunteurs plus avertis, favorisant ainsi l'accès à la propriété de ces emprunteurs.

Archer et al. (2003) et Van Order et al. (2000) étudient cette problématique et prouvent que le degré de réactivité n'est pas en général très différent entre les particuliers à revenus moyens et ceux à revenus plus faibles dans l'exercice du RA et du défaut. Il n'y a donc pas lieu de facturer un taux plus bas pour cette raison strictement financière.

Un même degré de réactivité ne signifie pas des taux identiques, les particuliers à faibles revenus produisant en général plus de défaut, mais que la raison n'est pas liée à un exercice différent de l'option. Il s'agit plutôt d'événements externes comme le chômage ; cet aspect justifie alors un taux plus élevé.

Néanmoins lorsque Pennington (2003) étudie les différences entre les mortgages « prime » et les mortgages « nonprime » les résultats sont différents. Un mortgage nonprime est un prêt immobilier accordé à des emprunteurs ne rentrant pas dans les critères classiques, à un taux plus élevé ; ce segment s'est fortement développé dans les années précédentes aux Etats-Unis.

Pennington établit dans son travail que non seulement les taux de RA et de défaut observés diffèrent, mais de plus la réactivité aux incitations entre un emprunteur « prime » et un emprunteur « nonprime » varie.

Ce désaccord dans les conclusions entre cet article et les deux autres cités ci-dessus provient peut-être d'une différence de population. Les emprunteurs à faibles revenus ne correspondant peut-être pas exactement aux emprunteurs nonprime.

## **c. Un exemple d'évaluation du coût d'une politique du logement**

On peut également mentionner un article intéressant de Deng et al. (1996) pour cette approche sociale du logement. A partir d'un modèle basique de taux de hasard ils cherchent à estimer le coût pour l'Etat d'une politique de cautionnement du logement. L'idée est d'aider les emprunteurs sans apports personnels ( $0.95 < LTV(0) < 1$ ) à obtenir des prêts équivalents aux emprunteurs avec un apport de 10% ( $LTV(0) = 0.9$ ), l'Etat couvrant les éventuels défauts en excès de ces personnes. Le modèle des taux de hasard permet alors d'évaluer la probabilité de défaut pour ces deux groupes sur un horizon de 15 ans, et en fonction de scénarios économiques de calculer le coût pour un gouvernement d'une telle politique.

## **IV. Option de déménagement**

Pavlov (2001) remet en question l'approche optionnelle classique du mortgage résidentiel. Celle-ci distingue une option de défaut et une option de RA, ce dernier pouvant être motivé par un raisonnement financier ou par des contraintes de mobilité exogènes : chômage, divorce, ...

La reformulation du problème amène à distinguer deux options : une option de mobilité et une option de refinancement strictement financier. La première provient d'une modélisation de la décision de déménagement ; une fois celui-ci décidé il peut se traduire par un défaut ou par une vente du bien suivie d'un RA. La deuxième option est motivée par le raisonnement classique qui consiste à comparer le taux du mortgage et le taux actuel sur cet actif pour décider de l'opportunité d'une renégociation.

Ainsi le défaut n'est que la conséquence d'une volonté de déménagement. Cette description est plus proche du comportement de l'emprunteur, la représentation RA / défaut étant quant à elle plutôt une vision de prêteur. La dualité mobilité / RA-financier conserve la caractéristique risques concurrents ; en effet un particulier envisageant de quitter son logement dans les mois à venir ne se lancera probablement pas dans une renégociation financière.

Pavlov estime ensuite ce modèle à l'aide de méthodes économétriques usuelles et démontre sa plus grande efficacité par rapport à l'approche traditionnelle. La distinction entre RA financier et RA de mobilité augmente le degré de performance des modèles.

Cette analyse est poursuivie par Clapp et al. (2001) ; les auteurs établissent dans cet article que des variables non-explicatives dans un modèle qui ne distingue pas les motivations des RA, peuvent le devenir si la distinction est faite, améliorant ainsi le caractère explicatif global.

Voici les principales variables agissant sur l'exercice des options d'après cet article :

- RA financier : taux actuel des mortgages, taille du prêt, LTV(t)
- RA de mobilité : caractéristiques de l'emprunteur (age, minorité culturelle, salaire), probabilité d'une situation de « negative equity »
- Défaut : notation de la qualité de crédit, LTV(t)

## **V. Enjeux de l'évaluation**

Le LTV est une quantité fondamentale dans l'étude du défaut. Le V de ce sigle est l'abréviation de « value », la valeur de marché du bien immobilier. Dans une partie précédente (partie 3) on a pu voir les difficultés de la mesure de cette quantité. Il est pourtant central de pouvoir se faire une idée aussi précise que possible de celle-ci. Le bien servant de garantie à la banque doit avoir une valeur suffisante pour permettre en cas de défaut de limiter les pertes ; c'est tout l'enjeu de l'évaluation immobilière.

Lacour et Malpezzi (2003) établissent que la surévaluation d'un bien augmente la probabilité de défaut. Pour cela ils utilisent un indice hédoniste basique qui va fournir une valeur théorique de la propriété évaluée ; le résidu, c'est-à-dire l'écart à la valeur

théorique, est utilisé comme un indicateur de sur- ou de sous-évaluation. Il est ensuite intégré dans un modèle de taux de hasard. La significativité de cette variable est établie mais l'impact est asymétrique. En cas de sous-évaluation le risque de défaut n'est pas modifié par contre celui-ci augmente en cas d'estimation trop élevée.

Ce résultat est confirmé par Noordewier, Harrison, Ramagopal (2001) mais avec une méthode différente. Leur base de données contient pour chaque acte de vente une évaluation du bien par un expert immobilier, celui-ci indique les prix de trois propriétés proches et comparables ayant été récemment vendues.

Ils testent alors deux quantités liées à la précision de l'évaluation. La première est une mesure de dispersion de l'estimation, il s'agit de la différence entre le prix maximal et le prix minimal des trois biens comparables. La seconde est un indicateur de surévaluation précisant si la propriété en question à un prix de vente supérieur aux trois références.

Ils établissent ainsi que la première mesure n'a pas d'impact sur le défaut mais par contre en cas de surestimation, phénomène capturé par la seconde variable, le risque de défaut s'accroît. Il existe aussi un effet sur le RA ; en cas de prix de vente très élevé (relativement aux comparables) le risque de RA diminue.

## **VI. Théorie des jeux**

Ciochetti et al. (2002) dans un article sur l'immobilier commercial évoquent le problème des rapports entre emprunteurs et prêteurs, cette réflexion s'inscrit plus généralement dans une problématique d'intérêts divergents entre actionnaires et obligataires.

L'exploitant de la structure, s'il anticipe un défaut probable, ne l'exercera probablement pas immédiatement. Il sera enclin à essayer d'extraire le maximum de cash flows avant de céder le bien au prêteur. Faire défaut sur une structure très dégradée ou légèrement dégradée ne fait pas de différences pour l'actionnaire, il s'agit là d'une question pertinente surtout pour les obligataires.

Une fois le prêt accordé, la banque est soumise à cet aléa moral. En conséquence elle évaluera ex-ante le risque d'une telle situation et pourra éventuellement demander un taux plus élevé si elle perçoit cette possibilité chez l'emprunteur. La capacité à négocier et à fournir des gages de bonne volonté à la banque est alors primordiale, la réputation de l'emprunteur intervient également dans ce processus.

Alexander et al. (2002) étudient sous l'angle des interactions stratégiques le cas des mortgages « subprime » souscrits par des brokers, TPO (third-party-originators), pour le compte d'une banque de détail.

A l'origine ceux-ci étaient rémunérés par une prime pour chaque prêt souscrit mais ils ne portaient pas le risque de crédit afférent à ces prêts. Ces actifs étaient détenus par la banque elle-même. En conséquence les brokers se trouvaient dans une situation où l'incitation à relâcher les critères de sélection était réelle. Soit de manière passive (« passive gaming ») par une rigueur relative dans la sélection des emprunteurs, soit de manière active en surévaluant par exemple la propriété servant de garantie (« active gaming »).

Peu à peu les banques se sont aperçues d'un plus grand taux de défaut pour ce type de prêt et ont commencé à facturer un taux plus important afin d'être rémunérées pour ce

risque. Ce système a donc été inefficace à ses débuts mais au fur et à mesure alors que les banques prenaient conscience du problème, la facturation d'un spread de taux l'a rendu efficace.

Ces deux articles s'inspirent d'une réflexion liée à la théorie des jeux mais ils n'élaborent pas de modèles sophistiqués pour en rendre compte contrairement à Jones et Nickerson (2002) qui utilisent d'une manière plus approfondie les outils de ce domaine. Ils cherchent à déterminer le montant de crédit accordé pour 1\$ de garantie et établissent par exemple les résultats suivants pour les stratégies optimales :

- le montant prêté pour 1\$ de garantie est plus élevé pour les prêts courts
- ce montant est très sensible à la volatilité perçue sur H
- dans certains cas cette somme est limitée et cela quelque soit le taux accepté par l'emprunteur

Le but de cet article est de rendre le plus optimal possible, pour l'emprunteur et pour le prêteur, le niveau des prêts accordés pour une garantie donnée.

## CONCLUSION

Ce mémoire ne prétend pas à l'exhaustivité sur un sujet aussi vaste que la modélisation des mortgages. Les articles présentés proviennent principalement de *Real estate economics*, journal de AREUEA (American Real Estate and Urban Economics Association) et du *Journal of real estate finance and economics*. Tous les articles publiés depuis janvier 2000 dans ces deux journaux de référence traitant directement de la théorie des mortgages ont été inclus dans ce travail. Pour les travaux antérieurs à l'année 2000 les articles ont été choisis en fonction de leur contribution et du nombre de citations s'y rapportant dans les publications postérieures. D'autres journaux ont également servi de sources mais de manière non-exhaustive.

Les deux axes de recherche sur les mortgages reposent sur des paradigmes différents : la théorie de l'arbitrage et l'économétrie. Certains auteurs adoptent une attitude d'opposition frontale en défendant l'une des théories contre l'autre, cependant l'évolution de la réflexion sur ce sujet met plutôt en évidence une dynamique d'enrichissement mutuel. Les modèles économétriques ont intégré des régresseurs liés à la théorie des options, les modèles théoriques ont révisé certaines hypothèses trop simplificatrices. L'approche optionnelle est la seule base théorique disponible sur ce sujet et même si elle est critiquable à certains égards elle a le mérite d'exister.

Des pistes de réflexion se sont ouvertes récemment permettant d'approfondir la réflexion ou d'utiliser de nouveaux outils. On peut citer par exemple la prise en compte de la dimension géographique, l'utilisation des indices hédonistes, la modélisation de la décision de déménager, la théorie des jeux...

Les premiers articles essayant de modéliser les mortgages grâce à la théorie optionnelle remontent à 1978 avec la thèse de Asay : « Rational mortgage pricing ». Cependant, même dans les articles les plus récents les flux de RA et de défauts se révèlent être difficiles à capturer et à modéliser très précisément. La réflexion sur le sujet n'est pas close et ces nouvelles voies sont donc souhaitables.

L'union européenne réfléchit actuellement à une plus grande intégration des financements immobiliers et aux moyens d'y parvenir ; la création de l'EMFA s'inscrit directement dans ce contexte. La modélisation des mortgages et des flux associés a été initiée principalement par la création des MBS aux Etats-Unis. Les flux de ces titres dépendent directement, ou indirectement, des versements effectués par les emprunteurs ; les risques de défaut et de RA sont donc fondamentaux dans le pricing de ces actifs. La titrisation est le prolongement naturel de cette étude.

## **BIBLIOGRAPHIE**

Agossou-Voyème, Mokrane, Dupuy, Plas. 2004. "The form of real estate risk : an application to french office property portfolios & lease lengths, market risk and portfolio diversification". *ERES meeting, Milan*

Alexander, Grimshaw, McQueen, Slade. 2002. "Some loans are more equal than others : third-party originations and defaults in the subprime mortgage industry". *Real estate economics* 30(4) : 667-697

Ambrose, Buttimer. 2000. "Embedded options in the mortgage contract". *Journal of real estate finance and economics* 21(2) : 95-111

Ambrose, Buttimer, Thibodeau. 2001. "A new spin on the Jumbo/Conforming loan rate differential". *Journal of real estate finance and economics* 23(3) : 309-335

Ambrose, Capone. 2000. "The hazard rates of first and second defaults". *Journal of real estate finance and economics* 20(3) : 275-293

Ambrose, Capone, Deng. 2001. "Optimal put exercise : an empirical examination of conditions for mortgage foreclosure". *Journal of real estate finance and economics* 23(2) : 213-234

Ambrose, LaCour-Little. 2001. "Prepayment risk in adjustable rate mortgages subject to initial year discounts : Some new evidence". *Real estate economics* 29(2) : 305-327

Ambrose, Sanders. 2001. "Commercial mortgage-backed securities : prepayment and default". *Working paper*

Archer, Elmer, Harrison, Ling. 2002. "Determinants of multifamily mortgage default". *Real estate economics* 30(3) : 445-473

Archer, Ling, McGill. 2003. "Household income, termination risk and mortgage pricing". *Journal of real estate finance and economics* 27(1) : 111-138

Asay. 1978. "Rational mortgage pricing". Ph.D. diss., University of Southern California. Reprinted as Research Paper 30, Federal Reserve Board, 1979.

Azevedo-Pereira, Newton, Paxson. 2002. "UK fixed rate repayment mortgage and mortgage indemnity valuation". *Real estate economics* 30(2) : 185-211

Azevedo-Pereira, Newton, Paxson. 2003. "Fixed-rate endowment mortgage and mortgage indemnity valuation". *Journal of real estate finance and economics* : 26(2/3) : 197-221

Bennett, Peach, Peristiani. 2000. "Implied mortgage refinancing thresholds". *Real estate economics* 28(3) : 405-434

- Calhoun, Deng. 2002. "A dynamic analysis of fixed- and adjustable-rate mortgage terminations" *Journal of real estate finance and economics* 24(1/2) : 9-33
- Capone. 2001. "Introduction to the special issue on mortgage modeling". *Journal of real estate finance and economics* 23(2) : 131-137
- Charlier, Van Bussel. 2003. "Prepayment behavior of Dutch mortgagors : an empirical analysis". *Real estate economics* 31(2) : 165-204
- Chen, Deng. 2003. "Commercial mortgage workout strategy and conditional default probability: Evidence from special serviced CMBS loans". *Working paper*
- Childs, Ott, Riddiough. 2001. "Valuation and information acquisition policy for claims written on noisy real assets". *Financial Management* summer 2001 : 45-75
- Childs, Ott, Riddiough. 2002. "Optimal valuation of noisy real assets". *Real estate economics* 30(3) : 385-414
- Childs, Ott, Riddiough. 2002. "Optimal valuation of claims on noisy real assets : theory and application". *Real estate economics* 30(3) : 415-443
- Childs, Ott, Riddiough. 2004. "Effects of noise on optimal exercise decisions : the case of risky debt secured by renewable lease income". *Journal of real estate finance and economics* 28(2/3) : 109-121
- Ciochetti, Deng, Gao, Yao. 2002. "The termination of commercial mortgage contracts through prepayment and default : a proportional hazard approach with competing risks". *Real estate economics* 30(4) : 595-633
- Ciochetti, Deng, Lee, Shilling, Yao. 2003. "A proportional hazards model of commercial mortgage default with originator bias". *Journal of real estate finance and economics* 27(1) : 5-23
- Clapp, Goldberg, Harding, Lacour-Little. 2001. "Movers and shuckers : interdependent prepayment decisions". *Real estate economics* 29(3) : 411-450
- Cox, Ingersoll, Ross. 1985. "An intertemporal general equilibrium model of asset prices". *Econometrica* 53 : 363-384
- Cox, Oakes. 1984. "*Analysis of survival data*". New York : Chapman and Hall
- Demey, Frachot, Riboulet. 2000. "Note sur l'évaluation de l'option de remboursement anticipé". *Note du GRO*
- Deng, Quigley, Van Order. 1996. "Mortgage default and low downpayment loans : the cost of public subsidy". *Regional science and urban economics* 26 : 263-285
- Deng, Quigley, Van Order. 2000. "Mortgage terminations, heterogeneity and the exercise of mortgage options". *Econometrica* 68(2) : 275-308



- Dombrow, Turnbull. 2004. "Trends in real estate research, 1998-2001 : What's hot and what's not". *Journal of real estate finance and economics* 29(1) : 47-70
- Downing, Stanton, Wallace. 2003. "An empirical test of a two-factor mortgage valuation model : How much do house prices matter?". *Working paper*
- Dunn , McConnell. 1980. "Rates of return on GNMA securities : the cost of mortgage funds". *AREUEA Journal* 8 : 320-336
- Dunn, McConnell.1981. "Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities". *Journal of finance* 36(3) : 599-616
- Elie, Frachot, Georges, Neuvial. 2002. "A model of prepayment for the french residential loan market". *Note du GRO*
- Fu, Lacour-Little, Vandell. 2003. "Commercial mortgage prepayments under heterogenous prepayment penalty structures ». *Journal of Real Estate Research* 25(3) : 245-275
- Goldberg, Capone. 1998. "Multifamily mortgage credit risk : lessons from recent history". *Journal of policy development and research* 4(1) : 93-113
- Goldberg, Capone. 2002. "A dynamic double-trigger model of multifamily mortgage default". *Real estate economics* 30(1) : 85-113
- Harrison, Noordewier, Ramagopal. 2002. "Mortgage terminations : the role of conditional volatility". *Journal of real estate research* 23(1/2) : 89-110
- Heckman, Singer. 1984. "A method for minimizing the impact of distributional assumptions in econometric models for duration data". *Econometrica* 52(2) : 271-320
- Hilliard, Kau, Slawson. 1998. "Valuing prepayment and default in a fixed-rate mortgage : a bivariate binomial options pricing technique". *Real estate economics* 26(3) : 431-468
- Huang, Ondrich. 2002. "Stay, pay, or walk away : A hazard rate analysis of federal housing administration-insured multifamily mortgage terminations". *Journal of housing research* 13(1) : 85-117
- Jones, Nickerson. 2002. "Mortgage contracts, strategic options and stochastic collateral". *Journal of real estate finance and economics*. 24(1/2) : 35-58
- Kelly, Slawson. 2001. "Time-varying mortgage prepayment penalties". *Journal of real estate finance and economics* 23(2) : 235-254
- Kariya, Kobayashi. 2000. "Pricing mortgage-backed securities, a model describing the burn-out effect". *Asia-Pacific Financial Markets* 7 : 189-204
- Kariya, Ushiyama, Pliska. 2002. "A 3-factor valuation model for mortgage-backed securities". *Working paper*

- Kau, Keenan, Muller, Epperson. 1992. "A generalized valuation model for fixed-rate residential mortgages". *Journal of money, credit and banking* 24(3) : 279-299
- Kau, Keenan, Muller, Epperson. 1993. "Option theory and floating-rate securities with a comparison of adjustable and fixed-rate mortgages" *Journal of business* 66(4) : 595-618
- Kau, Keenann. 1995. "An overview of the option-theoretic pricing of mortgages". *Journal of housing research* 6(2) : 217-244
- Kau, Slawson. 2002. "Frictions, heterogeneity and optimality in mortgage modeling". *Journal of real estate finance and economics* 24(3) : 239-260
- Lacour-Little, Malpezzi. 2003. "Appraisal quality and residential mortgage default : evidence from Alaska". *Journal of real estate finance and economics* 27(2) : 211-233
- Lacour-Little, Marschoun, Maxam. 2002. "Improving parametric mortgage prepayment models with non-parametric kernel regression". *Journal of real estate research* 24(3) : 299-327
- Lucas, Klaassen, Spreij, Straetmans. 2001. "An analytic approach to credit risk of large corporate bond and loan portfolios". *Journal of banking and finance* 25 : 1635-1664
- Mattey, Wallace. 2001. "Housing-price cycles and prepayment rates of U.S. mortgage pools". *Journal of real estate finance and economics* 23(2) : 161-184
- Maxam, Lacour-Little. 2001. "Applied nonparametric regression techniques : estimating prepayments on fixed-rate mortgage-backed securities". *Journal of real estate finance and economics* 23(2) : 139-160
- McConnell, Singh. 1994. "Rational prepayments and the valuation of collateralized mortgage obligations". *Journal of finance* 49(3) : 891-921
- Nakamura. 2001. "Valuation of mortgage-backed securities based upon a structural approach". *Asia-Pacific Financial Markets* 8 : 259-289
- Noordewier, Harrison, Ramagopal. 2001. "Semivariance of property value estimates as a determinant of default risk". *Real estate economics* 29(1) : 127-159
- Pavlov. 2001. "Competing risks of mortgage termination : Who refinances, who moves, and who defaults?". *Journal of real estate finance and economics* 23(2) : 185-211
- Pennington-Cross. 2003. "Credit history and the performance of prime and nonprime mortgages". *Journal of real estate finance and economics* 27(3) : 279-301
- Peristiani, Bennett, Monsen, Peach, Raiff. 1997. "Credit, equity and mortgage refinancings". *FRBNY Economic policy review* 1997 (july)
- Schwartz, Torous. 1989. "Prepayment and the valuation of Mortgage-Backed Securities". *Journal of finance* 44(2) : 375-392

- Schwartz, Torous. 1993. "Mortgage prepayment and default decisions : a Poisson regression approach". *AREUEA Journal* 21(4) : 431-449
- Stanton. 1995. "Rational prepayment and the valuation of mortgage-backed securities". *Review of financial studies* 8(3) : 677-708
- Stanton. 1996. "Unobservable heterogeneity and rational learning : pool specific vs. generic mortgage-backed security prices". *Journal of real estate finance and economics* 12(3) : 243-263
- Suarez. 2004. "European mortgage market : global view 1992-2003". *11<sup>th</sup> european real estate society conference*.
- Titman, Torous. 1989. "Valuing commercial mortgages: an empirical investigation of the contingent-claims approach to pricing risky debt". *Journal of finance* 44(2) : 345-373
- Vandell.1984. "On the assessment of default risk in commercial mortgage lending". *AREUEA journal* 12(3) : 270-296
- Vandell. 1995. "How ruthless is mortgage default ? A review and synthesis of the evidence". *Journal of housing research* 6(2) : 245-264
- Van Order, Zorn. 2000. "Income, location and default : some implications for community lending". *Real estate economics* 28(3) : 385-404

Références :

- A.DAVIDSON,A.SANDERS,L.WOLFF,A.CHING [2003]  
Securitization, structuring and investment analysis, *Wiley Finance*
- P.DEMEY, A.FRACHOT, G.RIBOULET [2003]  
Introduction à la gestion actif-passif bancaire, *Economica*
- F.FABOZZI, M.CHOUDHRY [2004]  
The handbook of european structured financial products, *Wiley Finance*
- A.FRACHOT, C.GOURIEROUX [1995]  
Titrisation et remboursements anticipés, *Economica*
- R.S. LIPTSER, A.N. SHIRYAYEV [1978]  
Statistics of random process II – Applications, *Springer-Verlag*

Candidat au DEA 104 :

Arnaud SIMON

# **Modélisation des mortgages**

## **Une revue de la littérature**

### Résumé :

Ce mémoire essaye, à partir d'articles provenant principalement de *Real estate economics* et du *Journal of real estate finance and economics*, d'exposer les principes de la modélisation des mortgages.

Deux approches s'opposent et se complètent, la théorie optionnelle et l'analyse économétrique. Le centre de l'étude porte sur les options de remboursement anticipé et de défaut détenues par l'emprunteur.

En novembre 2003, l'EMFA (European Mortgage Finance Agency) a été créée à l'exemple des agences de refinancement hypothécaires américaines, alors que se dessine au niveau européen une volonté d'intégration des différents marchés du financement immobilier. Le développement d'un marché secondaire substantiel pour les mortgages (MBS, CMBS, HEL...) est directement lié à la compréhension des flux produits par ces actifs.

Mots clés : Mortgage, options, taux de hasard, remboursement anticipé, défaut

Nombre de pages : 66

Nombre d'annexes : 0

Année universitaire 2003-2004

Université Paris Dauphine  
CEREG